

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. Н. КАРАЗИНА

**ДИФРАКЦИЯ ВОЛН
НА ПЕРИОДИЧЕСКИХ
МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ**

Монография

Харьков – 2017

УДК 537.874.6
ББК 22.336
Д 50

Рецензенты:

А. А. Кириленко – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом вычислительной электродинамики Института радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины;

Ю. В. Гандель – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математической физики и вычислительной математики механико-математического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина;

О. И. Сухаревский – Заслуженный деятель науки и техники Украины, доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Научного центра Воздушных Сил Харьковского университета Воздушных Сил имени Ивана Кожедуба.

*Утверждено к печати решением Ученого совета
Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина
(протокол № 7 от 1 июля 2015 года)*

Д 50 **Дифракция** волн на периодических многослойных структурах /
Л. Н. Литвиненко, С. Л. Просвирнин, С. А. Погарский, М. Е. Калиберда. – Х. : ХНУ
имени В. Н. Каразина, 2017. – 268 с.

ISBN 978-966-285-322-2

В монографии предложен новый подход к построению теории взаимодействия (рассеяния и распространения) электромагнитных волн с периодическими последовательностями экранов (препятствий). Построенные алгоритмы решения ряда задач являются достаточно универсальными и позволяют исследовать характеристики дифрагированных полей в многослойных структурах с использованием операторов рассеяния базовых элементов для полей как с дискретным, так и непрерывным пространственными спектрами.

Монография может представлять интерес не только для специалистов в области радиофизики, в частности техники СВЧ и антенной техники, но и для работающих в таких смежных областях, как акустика, гидродинамика, физика твердого тела и т. п., а также использоваться в учебном процессе при подготовке студентов и аспирантов соответствующих специализаций.

УДК 537.874.6
ББК 22.336

ISBN 978-966-285-322-2

© Харьковский национальный университет
имени В. Н. Каразина, 2017
© Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л.,
Погарский С. А., Калиберда М. Е., 2017
© Рыжова Ю. Н., макет обложки, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
ПРЕДИСЛОВИЕ.....	6
1. ВВЕДЕНИЕ.....	7
2. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ НА ПЛОСКИХ ЭКРАНАХ.....	10
2.1. Обобщенная матрица рассеяния плоской одномерно-периодической структуры.....	10
2.2. Операторный метод в задаче о дифракции на двух периодических экранах.....	13
2.3. Операторный метод как одна из реализаций метода частичного обращения оператора задачи.....	16
2.4. Операторный метод в задачах о дифракции полей с континуальным пространственным спектром.....	18
3. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФРАКЦИИ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ПЕРИОДИЧЕСКИХ МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ.....	19
3.1. Оператор отражения полубесконечной периодической структуры....	19
3.2. Собственные поля периодической структуры и оператор отражения полубесконечной периодической структуры.....	24
3.3. Операторы отражения и прохождения собственного поля на границе полубесконечной структуры.....	27
3.4. Операторы прохождения и отражения периодической структуры из конечного числа слоев.....	30
4. ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЭКРАНОВ.....	37
4.1. Коэффициент отражения полубесконечной периодической системы диэлектрических экранов.....	37
4.2. Коэффициент отражения полубесконечной системы экранов из диэлектрика с потерями.....	43
4.3. Коэффициенты отражения и прохождения конечного числа диэлектрических экранов.....	46
4.4. Наклонное падение плоской волны на периодическую последовательность диэлектрических экранов.....	48
5. ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЭКРАНОВ В ВИДЕ ЧАСТЫХ ЛЕНТОЧНЫХ РЕШЕТОК.....	54
5.1. Полубесконечная периодическая структура из частых ленточных решеток.....	54
5.2. Анизотропный искусственный диэлектрик.....	62
5.3. Последовательность решеток из лент конечной толщины.....	65
5.4. Периодические структуры со «сбоем» периода.....	67
5.5. Наклонное падение плоской волны на периодическую	

	последовательность плоских ленточных экранов – решеток.....	71
6.	ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЭКРАНОВ В ВИДЕ ЛЕНТОЧНЫХ РЕШЕТОК (МНОГОВОЛНОВЫЙ РЕЖИМ).....	76
6.1.	Обобщенная матрица рассеяния ленточной решетки.....	76
6.2.	О численном решении нелинейного операторного уравнения.....	80
6.3.	Периодическая структура из ленточных решеток (многоволновый режим).....	87
7.	ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДАХ С ПРЕПЯТСТВИЯМИ.....	95
7.1.	Стык регулярного и диафрагмированного волноводов.....	95
7.2.	Дифракция аксиально-симметричных и аксиально-несимметричных волн на системе аксиально-симметричных неоднородностей в коаксиальном тракте.....	101
7.2.1.	Дифракция E_{0m} -волн на полубесконечном круглом волноводе, расположенном соосно внутри круглого волновода большего радиуса.....	102
7.2.2.	Дифракция H_{0m} -волн на полубесконечном круглом волноводе, расположенном соосно внутри круглого волновода большего радиуса.....	106
7.2.3.	Дифракция аксиально-несимметричных волн на полубесконечном круглом волноводе, расположенном соосно внутри круглого волновода большего радиуса.....	107
7.2.4.	Одиночная щель.....	112
7.2.5.	Конечная система щелей. Рекуррентный подход.....	114
7.2.6.	Конечная система щелей. Система операторных уравнений.....	117
7.2.7.	Полубесконечная система щелей.....	118
7.2.8.	Исследование сходимости.....	121
7.2.9.	Численные результаты.....	123
7.3.	Генетический алгоритм оптимизации параметров волноводной структуры.....	132
7.3.1.	Параллельный генетический алгоритм.....	134
7.3.2.	Результаты оптимизации.....	135
7.4.	Дифракция волноводных волн на системе щелей в общей стенке двух параллельно расположенных прямоугольных волноводов.....	138
7.4.1.	Собственные волны волноводов, связанных системой бесконечных щелей. Волны H -типа.....	139
7.4.2.	Собственные волны волноводов, связанных системой бесконечных щелей. Волны E -типа.....	144
7.4.3.	Одиночная ячейка.....	147
7.4.4.	Конечная система ячеек.....	154
7.4.5.	Численные результаты.....	155
8.	ДИФРАКЦИЯ ВОЛНОВОДНЫХ ВОЛН В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ С КОНЕЧНОЙ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ЩЕЛЕЙ.....	161
8.1.	Одиночная щель.....	161
8.2.	Ограниченная система щелей.....	167
8.3.	Полубесконечная система щелей.....	169

8.4.	Численные результаты.....	170
9.	ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ ВОЛН С НЕПРЕРЫВНЫМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ СПЕКТРОМ НА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ЭКРАНОВ.....	179
9.1.	Дифракция волнового пучка на периодической последовательности экранов – решеток.....	180
9.2.	Дифракция волн на многослойной системе экранов со щелью.....	184
9.2.1.	Одиночный экран со щелью.....	184
9.2.2.	Двойной экран со щелью.....	187
9.2.3.	Конечная система экранов со щелью. Рекуррентный подход.....	191
9.2.4.	Конечная система экранов со щелью. Система операторных уравнений.....	192
9.2.5.	Полубесконечная последовательность экранов со щелью.....	194
9.2.6.	Дискретизация уравнений и анализ сходимости.....	196
9.2.7.	Численные результаты.....	201
9.3.	Дифракция волн на полубесконечной решетке типа жалюзи.....	207
9.3.1.	Операторные уравнения.....	209
9.3.2.	Процедура регуляризации.....	210
9.3.3.	Решение нелинейного уравнения.....	213
9.3.4.	Численные результаты.....	215
9.4.	Дифракция волн на плоской полубесконечной ленточной решетке....	220
10.	РАССЕЯНИЕ ВОЛН НА СТРУКТУРАХ ИЗ ПЛОСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ДВУМ НАПРАВЛЕНИЯМ ЭКРАНОВ.....	229
10.1.	Оператор рассеяния плоской двумернопериодической экрана – решетки.....	229
10.1.1.	Операторы отражения и прохождения слоя с полосковой периодической структурой.....	237
10.1.2.	Обобщенная матрица рассеяния металлического экрана конечной толщины с прямоугольными отверстиями, расположенными периодически в двух направлениях.....	244
10.2.	Операторы отражения и прохождения полубесконечной периодической структуры из двумернопериодических экранов.....	254
	ЛИТЕРАТУРА.....	264

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 2012 году в издательстве «Cambridge Scientific Publishers» (CSP) вышла монография «Wave Diffraction by Periodic Multilayer Structures» (Дифракция волн на периодических многослойных структурах) авторов Л. Н. Литвиненко и С. Л. Просвирнина. В этой книге были изложены основы нового подхода к анализу рассеяния и распространения электромагнитных волн, взаимодействующих со слоистыми средами. Основная идея этого подхода заключается в построении оператора отражения от полубесконечной последовательности периодически расположенных экранов и в его использовании при решении задач о дифракции волн на конечнослойных периодических структурах и о распространении собственных волн, возбуждающихся в таких структурах.

За время, истекшее с момента написания указанной монографии, авторы и их коллеги С. А. Погарский и М. Е. Калиберда выполнили ряд исследований по дальнейшему развитию предложенного подхода применительно к ряду задач, представляющих большой интерес для практических приложений, в частности для развития теории метаматериалов, элементной базы функциональных устройств СВЧ и антенной техники. Если в англоязычном издании основное внимание было уделено изучению дифрагированных полей с дискретным пространственным спектром, то в предлагаемой монографии так же подробно рассмотрены периодические структуры, взаимодействующие либо с полями, имеющими непрерывный пространственный спектр, либо порождающие дифрагированные поля с непрерывным пространственным спектром. Естественно, что в этих случаях соответствующие операторы рассеяния являются интегральными. Большое внимание уделено математическим проблемам, связанным с получением строгих решений граничных задач, разработке эффективных методов численного решения полученных нелинейных операторных уравнений, оценке погрешности численных результатов.

С согласия издательства CSP (Cambridge Scientific Publishers) авторы включили определенную часть опубликованного в упомянутом англоязычном издании материала, переработав и существенно дополнив его новыми результатами.

Поскольку содержание монографии посвящено решению актуальных проблем современной радиофизики, ее публикация на русском языке даст возможность ознакомиться с достижениями харьковской радиофизической школы широкому кругу отечественных и зарубежных читателей. После выхода русскоязычного издания авторы намерены опубликовать англоязычную версию монографии. Предварительная договоренность об этом с издательством CSP имеется.

ВВЕДЕНИЕ

В монографии предложен новый подход к построению теории взаимодействия (распространения и рассеяния) электромагнитных волн с периодическими последовательностями экранов (препятствий). Под периодической последовательностью здесь понимается либо бесконечная структура из равноотстоящих плоских экранов, либо полубесконечная или конечная часть такой структуры. Поскольку при анализе электромагнитного поля в бесконечной периодической последовательности экранов ее всегда можно рассматривать как две взаимодействующие полубесконечные последовательности, а свойства структуры с конечным числом равноотстоящих экранов, т. е. периодической структуры с двумя границами со свободным пространством, легко выяснить, если существует эффективное описание дифракции полей на этих границах, то фундаментальную роль в развитой теории играет спектральный оператор отражения (рассеяния) \hat{R} полубесконечной периодической структуры. Смысл этого оператора заключается в том, что падающему полю с некоторым известным (дискретным или непрерывным) пространственным спектром он ставит в соответствие отраженное поле также с дискретным или непрерывным спектром. Более строго, в соответствующем линейном пространстве оператор отражения позволяет по известному вектору спектральных амплитуд падающего поля найти вектор спектральных амплитуд отраженного поля. Отыскание оператора отражения \hat{R} от полубесконечной периодической последовательности экранов проводится с использованием специфической сдвиговой симметрии такой структуры: ее дифракционные свойства не изменяются, если со стороны границы отбросить один или любое конечное число экранов. Если известны спектральные операторы прохождения и отражения для одиночного экрана – элемента полубесконечной последовательности, указанное свойство симметрии структуры позволяет получить для нахождения оператора отражения \hat{R} нелинейное операторное уравнение второго рода, которое решается численными методами.

Показано, что падающее на полубесконечную периодическую структуру поле возбуждает в ней собственное поле соответствующей бесконечной периодической структуры, причем оператор прохождения, позволяющий найти вектор спектральных амплитуд возбужденного собственного поля, выражается через оператор \hat{R} . Исследована структура собственных волн, получено выражение, позволяющее отыскать постоянные распространения этих волн по

известному оператору \hat{R} . Более того, если в полубесконечной структуре собственная волна распространяется по направлению к ее границе со свободным пространством, то операторы отражения и прохождения для такого поля также выражаются через \hat{R} . Операторным методом, учитывающим взаимодействие волн, отраженных на границах со свободным пространством, получены операторы отражения и прохождения для периодической структуры из конечного числа экранов, причем и эти операторы выражаются через оператор \hat{R} . Таким образом, знание оператора \hat{R} позволяет построить полное феноменологическое описание электромагнитных свойств бесконечной периодической последовательности экранов, а также ее полубесконечной или конечнослойной частей.

В качестве примеров с помощью построенной теории проведено подробное исследование дифракционных свойств периодических структур из диэлектрических слоев (в том числе и слоев с потерями), из полупрозрачных анизотропных экранов в виде частых металлических ленточных решеток (в том числе из лент конечной толщины), а также из экранов в виде ленточных решеток в многоволновом режиме (то есть в случае, когда длина волны меньше периода решетки – экрана). Изучено преобразование электромагнитных полей на стыке регулярного и диафрагмированного волноводов, а также полей в волноводе с конечным числом диафрагм.

Рассмотрена дифракция аксиально-симметричных и аксиально-несимметричных волн на системе аксиально-симметричных неоднородностей в коаксиальном тракте и решена задача о дифракции волноводных волн на системе продольных щелей в общей стенке двух параллельно расположенных прямоугольных волноводов. Общей чертой перечисленных примеров является дискретный пространственный спектр дифрагированных полей, что позволяет при решении соответствующих задач использовать матричные операторы (или, как их иногда называют, – обобщенные матрицы рассеяния).

Большое внимание в монографии уделено исследованию с помощью развитого метода дифракционных свойств периодических структур, порождающих дифрагированные поля одновременно с дискретным и континуальным пространственными спектрами, или дифракции полей с непрерывным спектром (волновых пучков) на периодических структурах. В частности, впервые рассмотрено строгое решение задач о стыке регулярного плоского волновода и волновода с периодически расположенными поперечными по отношению к направлению распространения волноводных волн щелями. В этом случае поля внутри волновода описываются матричными, а в свободном пространстве – интегральными операторами.

Также впервые строго изучена дифракция волн на многослойной системе плоских экранов со щелью без ограничений, накладываемых на соотношение между длиной электромагнитной волны и расстоянием между соседними экранами. Отсутствие такого ограничения позволило проанализировать случай, когда энергия падающего поля может уноситься волноводными волнами, возбуждающимися в межэкранных плоских волноводах. И наконец, впервые получено и проанализировано строгое решение задачи о дифракции волн на полубесконечной решетке типа «жалюзи» из идеально проводящих бесконечно тонких лент, а также полубесконечной решетке из лент, лежащих в одной плоскости.

Развитый подход позволил также исследовать дифракционные свойства многослойных последовательностей из двумернопериодических плоских экранов. Такие структуры являются эффективной моделью бианизотропных сред.

Важным этапом при применении развитого операторного метода является получение оператора (матричного или интегрального) рассеяния одиночного экрана – элемента периодической последовательности. Такой оператор находится в результате решения ключевой задачи – граничной задачи о дифракции волн на соответствующем конкретном экране или волноводном препятствии. В монографии уделено большое внимание методам строгого решения таких ключевых задач. Так, для решения задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на плоской ленточной решетке и о дифракции волноводной волны на поперечной щели в стенке плоского волновода используется метод моментов. В случае щели в плоском экране – метод Винера–Хопфа, в задаче о стыке волновода с двухсвязной областью поперечного сечения (два соосно расположенных круглых волновода) с круглым волноводом – метод сингулярных интегральных уравнений.

Следует подчеркнуть, что написание монографии предпринято авторами не только для того, чтобы изложить принципиально новый достаточно общий подход к исследованию электродинамических свойств периодических структур, но и продемонстрировать его эффективность на ряде примеров, особенно представляющих интерес для технических приложений. Указанной целью продиктован выбор решенных задач с анализом новых физических результатов и оценка эффективности предлагаемого подхода по сравнению с традиционными методами изучения подобных проблем. Важно, что развитая теория по существу является строгой, поэтому оценка погрешности полученных в некоторых случаях приближенных асимптотических решений может быть выполнена в рамках изложенного метода путем сравнения с точными результатами.

Большое внимание в монографии уделено развитию методов решения полученных нелинейных операторных уравнений, особенно в случаях, когда рассматриваемые операторы рассеяния являются интегральными или в уравнение входят матричные и интегральные операторы одновременно. Исследованы вопросы, связанные с оптимизацией алгоритмов численного решения таких уравнений, а также с обоснованием единственности решения.

Развитый в монографии подход относится к стационарной теории дифракции электромагнитных волн в линейных средах. Изучение возможности обобщения предложенных методов на случаи нелинейных сред или нестационарных процессов можно рассматривать как одно из направлений дальнейших исследований.

Монография может представить интерес не только для специалистов в области радиофизики, в частности техники СВЧ и антенной техники, но и для работающих в таких смежных областях, как акустика, гидродинамика, физика твердого тела и т. п., а также использоваться в учебном процессе при подготовке студентов и аспирантов соответствующих специализаций.

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ НА ПЛОСКИХ ЭКРАНАХ

При теоретическом исследовании дифракции электромагнитных волн на экранах в линейных средах граничную задачу обычно сводят к функциональному уравнению вида

$$\hat{A}[x(\vec{r}, t)] = b(\vec{r}, t), \quad \vec{r} \in \Gamma, \quad (2.1)$$

где $x(\vec{r}, t)$ – неизвестная функция координат и времени, связанная с искомым дифрагированным полем, $b(\vec{r}, t)$ – известная функция, заданная первичным (падающим на препятствие) полем, Γ – граница препятствия и \hat{A} – линейный оператор, определенный в соответствующем функциональном пространстве. Для получения решения уравнения (2.1) необходимо обратить исходный оператор \hat{A}

$$x(\vec{r}, t) = (\hat{A}^{-1}b)(\vec{r}, t). \quad (2.2)$$

При известном $b(\vec{r}, t)$ можно найти дифрагированное поле, порождаемое достаточно произвольным падающим полем, нужно лишь, чтобы функция $b(\vec{r}, t)$ принадлежала к тому же функциональному пространству, на котором определен \hat{A}^{-1} . Этот оператор вбирает в себя информацию, содержащуюся в постановке задачи и необходимую для ее решения, а его действие на функцию, описывающую первичное поле, эквивалентно в определенном смысле взаимодействию этого поля с соответствующим препятствием.

2.1. Обобщенная матрица рассеяния плоской одномерно-периодической структуры

В качестве конкретного примера рассмотрим дифракцию плоской электромагнитной волны на плоском одномерно-периодическом экране. Пусть, для простоты, падающая волна линейно поляризована (либо вектор \vec{E} , либо вектор \vec{H} параллельны направлению, в котором экран однороден).

Система координат, экран и параметры, характеризующие геометрию задачи, показаны на рис. 2.1. В этом случае векторная задача сводится к паре скалярных.

Из соображений симметрии (см. также теорему Флоке [1]) понятно, что при падении на периодическую структуру плоской волны

$$u^i(y, z) = \exp[ik(y \sin \alpha + z \cos \alpha)] \quad (2.3)$$

(зависимость от времени $e^{-i\omega t}$ здесь и далее подразумевается) прошедшее электромагнитное поле представляет собой суперпозицию пространственных гармоник с дискретным спектром

$$u^t(y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^t(h_0) e^{ih_n y + i\gamma_n z}; \quad z > a, \quad (2.4)$$

где l – период решетки, $h_0 = k \sin \alpha$;

$$h_n = h_0 + 2\pi n/l; \quad \gamma_n = \sqrt{k^2 - h_n^2},$$

причем знак у корня выбран так, что $\text{Re } \gamma_n > 0$; если $\text{Re } \gamma_n = 0$, то $\text{Im } \gamma_n > 0$. Если γ_n – вещественная величина ($k^2 > h_n^2$), пространственная гармоника с номером n распространяется в полупространстве $z > a$ под углом α_n относительно положительного направления оси Oz , причем

$$\text{tg } \alpha_n = h_n / \gamma_n. \quad (2.5)$$

Если $|h_n| > k$, т. е. γ_n – мнимая величина, пространственная гармоника представляет собой медленную волну, распространяющуюся вдоль оси Oy (в положительном или отрицательном направлении). Ее поле экспоненциально убывает при удалении от поверхности периодической структуры. Плоскости равных амплитуд таких гармоник параллельны плоскости экрана, а плоскости равных фаз – перпендикулярны к ней. Таким образом, нераспространяющиеся от экрана гармоники представляют собой неоднородные плоские волны, поле которых локализовано вблизи поверхности периодической структуры.

Предположим, что первичное (падающее) поле – однородная или неоднородная плоская волна вида

$$u_m^i(y, z) = e^{ih_m y + i\gamma_m z}, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (2.6)$$

здесь $h_m = h_0 + 2\pi m/l$. Заменяя в выражении (2.4) h_0 на h_m , получаем

$$u_m^t(y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(h_m) e^{ih_{m+n} y + i\gamma_{m+n} z},$$

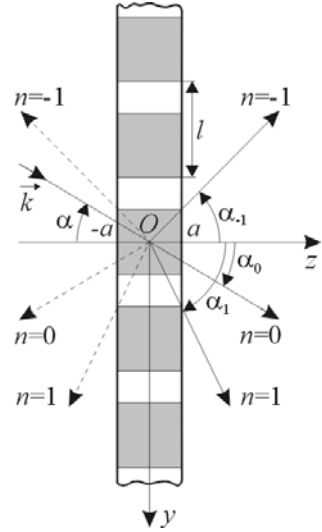


Рис. 2.1. Дифракция плоских волн на периодической структуре

или, переходя к другому индексу суммирования $s = m + n$, имеем окончательно

$$u_m^i(y, z) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_{s-m}(h_m) e^{ih_s y + i\gamma_s z}. \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что при падении на периодический экран плоской волны (2.3) под углом α и плоской волны (2.6), совпадающей по направлению распространения с какой-либо пространственной гармоникой спектра (2.4), набор волн спектра прошедшего поля оказывается тем же самым. Амплитуды дифракционных гармоник в этих случаях, конечно, различны.

Все изложенное выше относительно свойств прошедшего поля, очевидно, справедливо и для отраженного от периодической структуры поля. Направления распространения одноименных (с одинаковым значением индекса суммирования) пространственных гармоник отраженного и прошедшего полей симметричны относительно плоскости $z = 0$.

Каждой из падающих плоских волн единичной амплитуды $u_m^i(y, z)$ (см. (2.6)) в линейном векторном пространстве числовых последовательностей $l_{|m|}^2 = \left\{ \left\{ b_m \right\}_{m=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} |b_m|^2 |m| < \infty \right. \right\}$ соответствует вектор-столбец амплитуд пространственных гармоник прошедшего поля. Принадлежность вектора амплитуд пространственных гармоник пространству $l_{|m|}^2$ обеспечивает

конечность энергии поля в любой ограниченной области пространства, включая и окрестности ребер экрана. Составим бесконечную матрицу

$$t = \left\| b_n(h_m) \right\|_{n,m=-\infty}^{\infty} = \left\| b_{nm} \right\|_{n,m=-\infty}^{\infty} \quad (2.8)$$

из амплитуд пространственных гармоник прошедших полей и назовем ее обобщенной матрицей прохождения периодической структуры. Индекс n соответствует номеру гармоники прошедшего поля, m – номеру падающей волны (2.6). Заметим, что обобщенная матрица [2, 3] отличается от обычной матрицы рассеяния, широко используемой в теории цепей, тем, что наряду с распространяющимися однородными плоскими электромагнитными волнами в ней учитываются и неоднородные (медленные) волны пространственного спектра. Поэтому обобщенная матрица (2.8) является бесконечной.

С помощью матрицы t легко получить прошедшее поле, если на периодическую структуру падает суперпозиция волн вида (2.6). Пусть, например, амплитуды Фурье волн в этой суперпозиции образуют вектор-столбец $\left\{ b_m^i \right\}_{m=-\infty}^{\infty}$. Тогда вектор амплитуд прошедшего поля можно найти по формуле

$$b^t = tb^i = \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{nm} b_m^i \right\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Бесконечная матрица t определяет линейный оператор \hat{t} , который каждому вектору b^i амплитуд падающего поля ставит в соответствие вектор амплитуд прошедшего поля b^t . Эти векторы описывают соответствующие электромагнитные поля (падающее и прошедшее), представленные в виде рядов пространственных гармоник и являющиеся решениями уравнения Гельмгольца, имеющие конечную энергию в любой ограниченной области и удовлетворяющие условию излучения при $z \rightarrow +\infty$.

Аналогичным образом строится обобщенная матрица отражения. Каждой из плоских волн (2.6) соответствует вектор $\{a_{nm}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ амплитуд пространственных гармоник отраженного поля

$$u^r(y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nm}(h_m) e^{ih_n y - i\gamma_n z}.$$

Бесконечная матрица

$$r = \|a_{nm}\|$$

представляет собой обобщенную матрицу отражения и определяет линейный оператор \hat{r} , который каждому вектору амплитуд пространственных гармоник падающего поля ставит в соответствие вектор амплитуд гармоник отраженного поля.

Следует иметь в виду одно важное обстоятельство. Пусть на периодическую структуру падает плоская волна из полупространства $z > a$

$$u^i(y, z) = e^{ih_m y - i\gamma_m z}, \quad (2.9)$$

где $h_m = h_0 + 2\pi m/l$, т. е. постоянные распространения в направлении оси Oy у волн (2.6) и (2.9) одинаковы. В общем случае, как операторы прохождения, так и отражения, соответствующие волнам, падающим на структуру из полупространств $z > a$ и $z < -a$, различны. Однако, если периодическая структура симметрична относительно плоскости $z = 0$, то операторы прохождения и отражения для волн (2.6) и (2.9) соответственно совпадают.

Будем далее считать, что в результате решения соответствующей граничной задачи (2.1) операторы \hat{t} и \hat{r} известны (см., например, [4]).

2.2. Операторный метод в задаче о дифракции на двух периодических экранах

Совпадение направлений распространения пространственных гармоник дифрагированного поля при падении на периодический экран плоских волн

с постоянными распространения $h_m (m = 0, \pm 1; \pm 2 \dots)$ вдоль оси Oy является очень важным. Это обстоятельство приводит к тому, что в любой системе параллельных плоских периодических структур, в общем случае имеющих различную геометрию и электрические свойства, но одинаковый период, электромагнитное поле в случае дифракции плоской волны представляет собой спектр плоских волн, направления распространения которых такие же, как и при дифракции на каждой из отдельных структур, составляющих систему.

Рассмотрим решение задачи о дифракции плоской волны на двух параллельно расположенных периодических экранах (рис. 2.2). На систему из полупространства $z < -a_1$ под углом α падает плоская волна с амплитудой b_0^i . Пусть периодические структуры имеют одинаковый период l , симметричны относительно плоскостей $z = 0$ и $z = \Delta z$ соответственно, и для каждой из них известны операторы прохождения и отражения. Для экрана, расположенного симметрично плоскости $z = 0$, операторы обозначим индексом 1, а для экрана, симметричного плоскости $z = \Delta z$, – индексом 2.

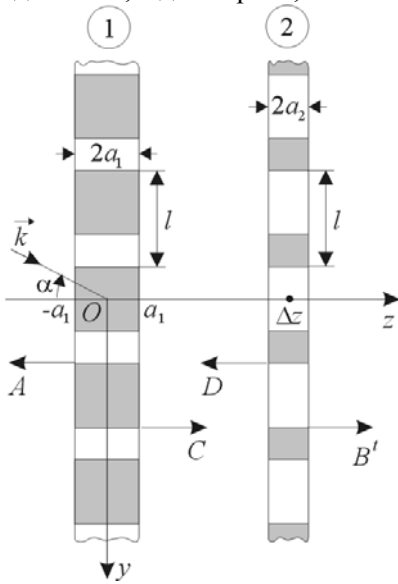


Рис. 2.2. Падение плоской волны на двухслойную периодическую структуру

Обозначим вектор амплитуд пространственных гармоник отраженного поля через A , прошедшего через структуру как B^t , а векторы амплитуд пространственных гармоник между периодическими экранами, распространяющихся (или затухающих) в положительном и отрицательном направлениях оси Oz назовем соответственно C и D . Заметим, что введенные здесь операторы прохождения и отражения записаны для экранов, симметрично расположенных относительно плоскости $z = 0$. Поэтому отраженные и прошедшие поля, связанные с первой неоднородностью (A и C), мы запишем в системе координат xuz ,

а поля D и B^t (порождаемые вторым экраном), соответственно, в системе координат $xu\tilde{z}$, где $\tilde{z} = z - \Delta z$. В таком случае, для изучения взаимодействия

поля C со вторым экраном и поля D с первым, эти поля необходимо переписать в системы координат, связанные с препятствиями. Легко увидеть,

что для преобразования поля $\sum_{s=-\infty}^{\infty} f_s^+ e^{ih_s y + i\gamma_s z}$ из системы координат xuz

в систему координат $xy\tilde{z}$ и поля $\sum_{s=-\infty}^{\infty} f_s^- e^{ih_s y - i\gamma_s \tilde{z}}$ соответственно в систему xyz , необходимо векторы $\{f_s^+\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\{f_s^-\}_{-\infty}^{\infty}$ умножить на одну и ту же диагональную матрицу

$$\varphi = \left\| \delta_{mn} e^{i\gamma_n \Delta z} \right\|_{n,m=-\infty}^{\infty}, \quad (2.10)$$

где δ_{mn} – символ Кронекера. Пусть $\hat{\varphi}$ – линейный оператор с диагональной матрицей φ (2.10).

Обозначим вектор, соответствующий падающей волне, через B^i . Он имеет единственную отличную от нуля компоненту b_0^i .

Векторы амплитуд Фурье полей в различных областях пространства связаны с падающим полем B^i следующим образом

$$\begin{cases} A = \hat{r}_1 B^i + \hat{t}_1 \hat{\varphi} D, \\ B^t = \hat{t}_2 \hat{\varphi} C, \\ C = \hat{t}_1 B^i + \hat{r}_1 \hat{\varphi} D, \\ D = \hat{r}_2 \hat{\varphi} C. \end{cases} \quad (2.11)$$

Третье и четвертое равенства (2.11) образуют систему уравнений относительно D и C , откуда

$$C = \hat{t}_1 B^i + \hat{r}_1 \hat{\varphi} \hat{r}_2 \hat{\varphi} C, \quad (2.12)$$

далее с учетом первого и второго уравнений (2.11) получаем для векторов амплитуд прошедшего и отраженного полей

$$\begin{aligned} B^t &= \hat{t}_2 \hat{\varphi} (I - \hat{r}_1 \hat{\varphi} \hat{r}_2 \hat{\varphi})^{-1} \hat{t}_1 B^i, \\ A &= \left[\hat{r}_1 + \hat{t}_1 \hat{\varphi} \hat{r}_2 \hat{\varphi} (I - \hat{r}_1 \hat{\varphi} \hat{r}_2 \hat{\varphi})^{-1} \hat{t}_1 \right] B^i. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Решение задачи, таким образом, существует, единственно и имеет вид (2.13), если существует оператор $(I - \hat{r}_1 \hat{\varphi} \hat{r}_2 \hat{\varphi})^{-1}$, т. е. определитель матрицы $I - r_1 \varphi r_2 \varphi$ не равен нулю. В противном случае нетривиальное решение имеет однородное уравнение, которое можно получить из (2.12), положив B^i равным нулю, а уравнение

$$\det(I - r_1 \varphi r_2 \varphi) = 0$$

определяет условия, при которых в системе из двух экранов могут существовать собственные волны.

Решение задачи дифракции в виде (2.13) фактически определяет операторы прохождения и отражения системы в целом. В принципе, применяя тот же алгоритм с новыми операторами, можно получить решение задачи дифракции на системе, в которую в качестве элемента входит двойная (двухслойная) периодическая структура.

2.3. Операторный метод как одна из реализаций метода частичного обращения оператора задачи

Изложенный выше метод решения задачи дифракции на сложной структуре носит название операторного метода. В теории дифракции операторный метод представляет собой одну из эффективных реализаций весьма общего подхода к решению соответствующих граничных задач, который получил название метода частичного обращения (иногда «метода полуобращения»). Основная идея метода полуобращения состоит в том, что задача дифракции, сформулированная в виде операторного уравнения (2.1), решается в два этапа. На первом этапе оператор \hat{A} представляется в виде суммы операторов $\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2$ с таким расчетом, чтобы для оператора \hat{A}_1 можно было получить обратный \hat{A}_1^{-1} , а оператор \hat{A}_2 при тех физических условиях, в которых нужно проанализировать решение задачи дифракции, был мал по норме. Второй этап решения задачи состоит в получении решения уравнения

$$x = -\hat{A}_1^{-1}\hat{A}_2x + \hat{A}_1^{-1}b. \quad (2.14)$$

Например, при решении задачи о дифракции плоской волны на ленточной решетке с помощью так называемого «метода задачи Римана–Гильберта» [4] оператор \hat{A}_1 является статической (или близкой к ней) частью оператора \hat{A} . Поэтому \hat{A}_2 мал по норме, если длина волны больше периода структуры. Если в этой же задаче выбрать в качестве оператора \hat{A}_1 статическую часть оператора \hat{A} , относящуюся к отдельной ленте [5], оператор \hat{A}_2 будет тем меньше (по норме), чем меньше отношение ширины ленты к длине волны и больше период решетки по сравнению с длиной волны, и т.д.

Применение операторного метода в нашем случае предполагает, что обращению подвергается часть оператора, соответствующая дифракции на одном из препятствий, входящих в исследуемую структуру.

Представим уравнение (2.12) в виде

$$C = \hat{t}_1 B^i + \hat{P}_{12} C, \quad (2.15)$$

где $\hat{P}_{12} = \hat{r}_1 \hat{\phi} \hat{r}_2 \hat{\phi}$. Сравнивая уравнения (2.14) и (2.15), легко установить, что обращению подвергнута часть оператора, которая соответствует задаче дифракции на периодической структуре, обозначенной цифрой 1. Оператор

\hat{P}_{12} описывает взаимодействие между первой и второй структурами. Если экраны имеют хорошую прозрачность, взаимодействие между ними слабое. Применим к решению уравнения (2.15) метод возмущений. Будем искать решение уравнения в виде суммы

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} C_n, \quad (2.16)$$

предполагая, как обычно, что C_n настолько же мал по сравнению с C_{n-1} , насколько \hat{P}_{12} по норме мал по сравнению с единицей. Подставляя сумму (2.16) в уравнение (2.15) и приравнивая члены одного порядка, получаем

$$\begin{aligned} C_0 &= \hat{t}_1 B^i, \\ C_1 &= \hat{P}_{12} C_0, \\ &\dots\dots\dots \\ C_n &= \hat{P}_{12} C_{n-1}. \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (2.17)$$

Всем величинам, входящим в формулу (2.17), легко дать физическое истолкование. Вектор C_0 связан с полем, прошедшим через экран 1 при условии, что второй экран отсутствует; C_1 – результат рассеяния на экране 1 при падении на него той части поля C_0 , которая отражается экраном 2, и т. д.

Решение уравнения (2.15) в виде ряда (2.16), члены которого определяются по формулам (2.17), можно трактовать как результат применения к уравнению (2.15) метода последовательных приближений. В принципе, представление решения уравнения (2.15) в виде сходящегося операторного ряда Неймана здесь приведено лишь для облегчения физической интерпретации результата полуобращения оператора задачи. В действительности, если прошедшее за каждый из экранов поле не равно тождественно нулю, то сумма операторного ряда равна $(I - \hat{r}_1 \hat{\phi} \hat{r}_2 \hat{\phi})^{-1} \hat{t}_1$ и решение $C = (I - \hat{P}_{12})^{-1} \hat{t}_1 B^i$ всегда существует. В связи с этим обстоятельством нам нет необходимости в дальнейшем заниматься детальными оценками величины норм операторов прохождения и отражения. Ограничимся лишь утверждением о том, что нормы операторов $\|\hat{t}\|$, $\|\hat{r}\|$ и $\|\hat{\phi}\|$ не превосходят единицу. Если предположить, что среда между периодическими структурами обладает диссипативными свойствами, то $\|\hat{\phi}\| < 1$ и, очевидно, ряд (2.16) сходится. В соответствии с принципом предельного поглощения [6], получив сумму ряда, мы можем перейти к рассмотрению случая исчезающе малых (в пределе нулевых) потерь в среде.

2.4. Операторный метод в задачах о дифракции полей с континуальным пространственным спектром

Спектральные операторы рассеяния (прохождения или отражения) в рассмотренном примере использования операторного метода для решения задачи дифракции плоской электромагнитной волны на сложной периодической структуре оказались операторами с бесконечными матрицами. Такие операторы необходимы для описания полей с дискретным пространственным спектром, когда падающее и прошедшее (отраженное) поля определяются соответствующими векторами-столбцами спектральных амплитуд в линейном векторном пространстве с дискретным базисом.

Картина существенно усложняется, если компоненты составной структуры имеют различные периоды. Если периоды кратны, тогда наибольший из них должен быть выбран в качестве периода структуры в целом (если отношение периодов – рациональное число, то периодом является их наименьшее общее кратное). При этом поля и операторы следует привести к новому базису, соответствующему периоду всей структуры. Если отношение периодов не является рациональным числом, то структура в целом не есть периодической. Каждая спектральная гармоника в базисе, связанном с одним из препятствий, порождает в рассеянном на другом препятствии поле с новым (соответствующим новому базису) спектром пространственных гармоник. Поэтому получить решение задачи операторным методом в этом случае затруднительно.

Пример с матричными спектральными операторами рассеяния выбран нами не случайно. Во-первых, такие операторы возникают в задачах о дифракции волн на периодических структурах, которые в связи с разнообразием эффектов, имеющих место при взаимодействии с электромагнитными полями, находят широкое применение и активно исследуются.

Во-вторых, поскольку свойства таких операторов хорошо изучены, а физическая интерпретация результатов их применения достаточно проста, основное изложение метода исследования дифракции волн на многослойных структурах будет далее вестись на примере объектов, порождающих рассеянные поля с дискретным пространственным спектром.

В-третьих, операторы с бесконечными матрицами занимают особое промежуточное положение между операторами с матрицами конечного порядка (либо даже в одномерном случае – комплексными коэффициентами прохождения и отражения) и континуальными (интегральными) операторами, возникающими в задачах о дифракции либо поля с континуальным спектром (волновой пучок), либо на препятствиях, порождающих рассеянные поля с континуальным пространственным спектром (или то и другое вместе).

В дальнейшем при рассмотрении конкретных задач мы продемонстрируем применение операторного метода для нахождения дифрагированных полей как с дискретным, так и непрерывным пространственным спектром.