ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

ЕРС – електрорушійна сила
ІСВ – інерціальна система відліку
МКА – метод комплексних амплітуд
МПХ – монохроматична плоска хвиля
ПНД – принцип найменшої дії
ПЧК – просторово-часовий континуум
СТВ – спеціальна теорія відносності

ПЕРЕДМОВА

Вивчення теоретичної фізики є основою базової освіти на факультетах фізичного профілю класичних університетів. Класична електродинаміка разом із теоретичною механікою, квантовою механікою, статистичною фізикою та термодинамікою є однією з основних теоретичних дисциплін при підготовці фізиків і радіофізиків. Глибокі знання з цих предметів – необхідна передумова успішного вивчення спеціальних дисциплін. Електродинаміка як розділ теоретичної фізики є одним із базових курсів, що читаються на радіофізичному факультеті[1], який становить основу професіональної підготовки радіофізиків.

Наявність значної кількості літератури з класичної електродинаміки не виключає необхідності видання нових курсів, що відрізняються від попередніх об'ємом матеріалу, рівнем, докладністю і методикою викладання.

Пропонований підручник містить матеріали лекційного курсу «Електродинаміка», який читається на радіофізичному факультеті Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна понад тридцять років. Підручник присвячено вивченню класичної теорії взаємодії електромагнітного поля з зарядженими частинками, з речовиною, а також основних закономірностей поширення електромагнітних хвиль у середовищах з різними електрофізичними властивостями.

Курс ґрунтується на таких загальнонаукових дисциплінах, як вища математика, фізика, теоретична механіка, і структурно складається з трьох частин: «Теорія поля», «Макроскопічна електродинаміка» та «Електромагнітні хвилі».

Для адекватного сприйняття викладеного матеріалу необхідно, щоб, окрім знань з базових курсів загальної фізики та вищої математики, читач володів інформацією з курсу теоретичної механіки.

[1] У 2015 році радіофізичний факультет було перейменовано на факультет радіофізики, біомедичної електроніки та комп'ютерних систем.

Для полегшення розуміння у додатках коротко наведено необхідну допоміжну інформацію. З метою можливості самоконтролю рівня отриманих знань підручник доповнено питаннями та завданнями з викладеного матеріалу.

Пропонований підручник є переробленим, доповненим та виправленим поєднанням першої частини курсу – мікроскопічної електродинаміки, якій присвячено навчальний посібник авторів О. В. Багацької, О. Ю. Бутрима, М. М. Колчигіна, О. О. Третьякова, С. М. Шульги «Електродинаміка. Теорія поля», рекомендований Міністерством освіти і науки України для вищих навчальних закладів (2008 р.), а також навчального посібника «Макроскопічна електродинаміка» авторів О. В. Багацької, О. Ю. Бутрима, М. М. Колчигіна, Л. М. Литвиненка, О. О. Третьякова, С. М. Шульги, виданого у 2012 році, що містить другу і третю частини, а саме, розділи «Макроскопічна електродинаміка» та «Електромагнітні хвилі».

Підручник орієнтовано на широкий загал студентів, аспірантів, викладачів і фахівців, що працюють у галузі фізики та радіофізики.

Автори висловлюють подяку доктору фізико-математичних наук, професору О. Г. Неруху і доктору фізико-математичних наук, професору О. О. Дробахіну за корисні зауваження при рецензуванні підручника.

ГЛАВА 1. МІКРОСКОПІЧНА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

Вступ

Фізичний об'єкт досліджень у теорії поля (мікроскопічній електродинаміці)

Фізичним об'єктом досліджень мікроскопічної електродинаміки є фізична система, що складається з матеріальних тіл і електромагнітних полів. Аналог таких систем досліджується в теоретичній механіці. Відмінність від теоретичної механіки полягає в тому, що в електродинаміці кожне тіло, крім маси m, має ще і електричний заряд e. При цьому вважається, що заряд і маса – незалежні характеристики тіла.

Наявність заряду приводить до появи електромагнітного поля, яке визначає взаємодію заряду з іншими електричними зарядами.

Методи дослідження об'єктів мікроскопічної електродинаміки

Існують *два методи* дослідження фізичних систем – *теоретичний* та *експериментальний.*

Перевагою експериментального методу є отримання повної реальної фізичної інформації, що містить як загальні закономірності, так і частинні особливості, деталі.

Призначення теоретичного методу полягає у виявленні головних закономірностей при абстрагуванні від незначних деталей. Для цього треба спростити характеристики системи, не втративши основні механізми взаємодії.

Теоретична модель реального фізичного об'єкта, що використовується в мікроскопічній електродинаміці. Область застосовності даної теорії

У межах досліджуваної моделі розмірами і формою тіл можна знехтувати, тому будемо використовувати таку *теоретичну модель* – фізичну систему, яку утворено матеріальними точками, що мають маси і заряди.

Електродинаміка вивчає еволюцію фізичної системи заряджених матеріальних точок, які рухаються, і їх взаємодію з електромагнітним полем, що також входить у фізичну систему.

Обмеження теорії, які пов'язані з прийнятими припущеннями:

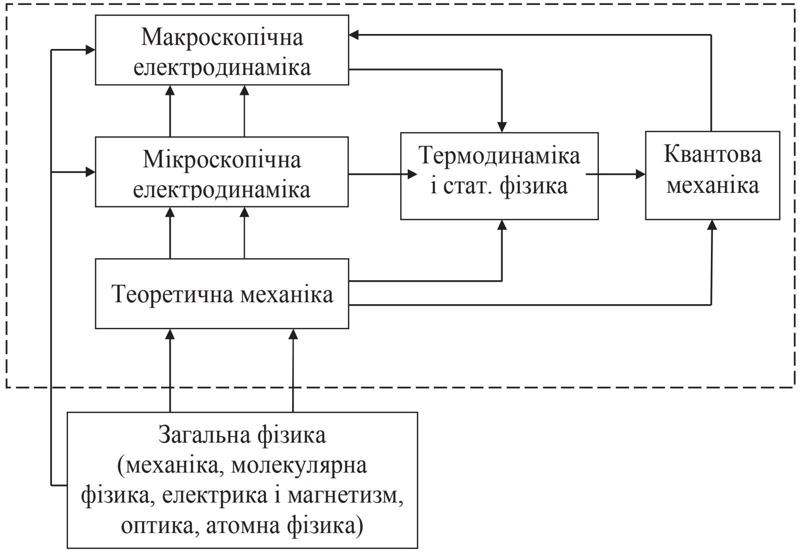
- оскільки ми моделюємо реальні об'єкти матеріальними точками, то теорія поля не дозволяє досліджувати процеси, що відбуваються всередині тіл;
- через те, що реальними розмірами тіл ми нехтуємо, то випадок нескінченно малих відстаней між тілами з розгляду виключається, тобто розглядаються тіла, віддалені один від одного на скінченні відстані.

Ці обмеження і визначають область застосовності теорії.

Фундаментальна проблема природознавства, що розв'язується в електродинаміці

Фундаментальною проблемою природознавства є вивчення процесу зміни системи у часі, тобто *еволюції системи*. Специфіка електродинамічних систем полягає в наявності елемента системи, який розповсюджується зі швидкістю світла – *електромагнітного поля*. Це обумовлює необхідність урахування релятивістських ефектів.

Місце мікроскопічної електродинаміки в курсі теоретичної фізики



Фундаментальні положення теоретичної фізики, на яких базується побудова теорії поля

Ознакою досконалості науки є мінімальна кількість постулатів, на яких вона базується.

В основі теорії поля лежать три постулати: *два загальнофізичні*:

1) постулати спеціальної теорії відносності Ейнштейна (СТВ), а саме, принцип відносності та інваріантності швидкості світла (додаток D);

2) принцип найменшої дії за Гамільтоном (ПНД) (додаток E);

і *спеціальний постулат електромагнетизму*:

3) визначення сили Лоренца, що діє з боку електромагнітного поля на заряджену частинку в точці з радіусом-вектором $\vec{r}$ у момент часу t:

$$\vec{F}_L(\vec{r},t) = e\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{e}{c}\left[\vec{v},\vec{H}(\vec{r},t)\right].$$

Сила Лоренца складається з сили Кулона та сили Ампера. Тут e – заряд частинки, $\vec{v}$ – її швидкість, $\vec{E}(\vec{r},t)$ – напруженість мікроскопічного електричного поля, $\vec{H}(\vec{r},t)$ – напруженість мікроскопічного магнітного поля. Особливістю електродинаміки є той факт, що з'явилась сила, яка залежить від вектора швидкості $\vec{v}$ і не може бути визначена в теоретичній механіці.

Роль релятивістської механіки в побудові теорії поля

При побудові теорії поля релятивістська механіка є:
- джерелом наукових припущень;
- засобом перевірки математичних співвідношень.

§ 1. Функція Лагранжа для зарядженої частинки в електромагнітному полі. Чотиривимірний векторний потенціал електромагнітного поля

1. Як сформулювати властивість адитивності функціонала дії? Який вигляд має функціонал дії для зарядженої частинки в електромагнітному полі? Як вводиться чотиривимірний векторний потенціал електромагнітного поля?
2. Як отримати вираз функції Лагранжа для зарядженої частинки в електромагнітному полі?
3. Як вводиться узагальнений вектор імпульсу для зарядженої частинки в електромагнітному полі? Чому він дорівнює? В чому полягає фізичний зміст тривимірного векторного потенціалу електромагнітного поля?
4. Отримати формулу для енергії зарядженої частинки в електромагнітному полі. Як сформулювати фізичний зміст скалярного потенціалу електромагнітного поля?
5. Чому дорівнює функція Гамільтона для зарядженої частинки в електромагнітному полі?

Механіка вивчає рух матеріальних тіл, що мають масу m_i, положення яких у кожний момент часу характеризується радіусом-вектором $\vec{r}_i$.

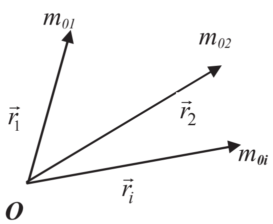


Рис. 1

Кожному тілу (частинці, матеріальній точці), якому притаманна маса m_{0i}, ставиться у відповідність функціонал дії S_{m_i}. Будемо вважати, що частинки є незалежними об'єктами. Функціонал дії системи незалежних частинок дорівнює сумі функціоналів дії всіх частинок, тобто функціонал дії має властивість адитивності

$$S = \sum_{(i)} S_{m_i}.$$

У мікроскопічній електродинаміці (теорії поля) об'єктом дослідження виступає матеріальна точка, яка, окрім маси m_{0i}, має ще і заряд e_i. Заряд не залежить від маси і є рівноправною характеристикою матеріальної точки.

Аксіоматика мікроскопічної електродинаміки вводиться на основі постулатів релятивістської механіки – понятті про інерціальну систему відліку, постулаті відносності, законі руху, фізичних уявленнях про простір і час, а також принципі найменшої дії (див. додатки D, E).

Припустимо, що S – функціонал дії для зарядженої частинки. Властивості частинки, яка має масу і заряд, еквівалентні властивостям двох суміщених частинок з масою m_0 і зарядом e.

Виходячи з адитивності функціонала дії,

$$S = S_m + S_{mf}, \tag{1.1}$$

де S_m – функціонал дії частинки, що має лише масу, а S_{mf} – функціонал дії частинки, яка має заряд.

Із релятивістської механіки відомо, що функціонал дії вільної релятивістської частинки визначається відповідно до (Е.11):

$$S_m = \int_a^b \alpha ds; \quad \alpha = -m_0 c.$$

Під знаком інтеграла стоїть елементарний інтервал. З урахуванням явного вигляду елементарного інтервалу в чотиривимірному просторі цей вираз можна записати так:

$$S_m = -m_0 c \int_a^b \sqrt{-dx_\mu^2}. \tag{1.2}$$

Елементарний інтервал згідно з (D.8) дорівнює

$$ds = \sqrt{-dx_\mu^2} = \sqrt{-dx_\mu dx_\mu} = \sqrt{-d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}. \tag{1.3}$$

Тут x_μ – чотиривимірний радіус-вектор, dx_μ – диференціал від нього. Чотиривимірні координати дорівнюють $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict = \tau$.

Функціонал дії також можна визначити як

$$S_m = \int_{t_a}^{t_b} L dt, \tag{1.4}$$

де L – функція Лагранжа.

Функціонал дії зарядженої частинки S_{mf} будемо будувати аналогічно тому, як побудовано S_m. Крім того, в міркуваннях будемо спиратися на той факт, що функціонал дії повинен бути інваріантним відносно перетворень Лоренца.

1) $S_m \sim m_0$, $m_0 = \text{inv}$. Тому $S_{mf} \sim e$, $e = \text{inv}$.

2) $S_m \sim \int_a^b [ds]$. Через це будемо вважати, що $S_{mf} \sim \int_a^b \{?\}$, де $\{?\}$ – аналог $[ds]$.

3) Підінтегральний вираз $[ds]$ є інваріантом відносно перетворень Лоренца, тому підінтегральний вираз $\{?\}$ також повинен бути інваріантним відносно перетворень Лоренца.

4) $[ds]$ є справжнім скаляром (не змінює знак при інверсії системи координат (див. додаток В)), тому $\{?\}$ – теж справжній скаляр.

5) $[ds] \sim \sqrt{-dx_\mu^2} \sim (dx_\mu)^1$. Через це $\{?\} \sim (dx_\mu)^1$.

Для того щоб умови 3–5 були виконані, під інтегралом у S_{mf} повинен стояти вираз, який є інваріантом відносно перетворень Лоренца і при цьому пропорційний $(dx_\mu)^1$. Оскільки скалярний добуток двох векторів інваріантний відносно перетворень Лоренца, оберемо підінтегральний вираз у вигляді скалярного добутку $A_\mu dx_\mu$. Вектор A_μ повинен характеризувати електромагнітне поле, що діє на заряд, явний вигляд цього вектора поки не відомий. Представимо вектор A_μ у чотиривимірному просторі так:

$$A_\mu = (A_1, A_2, A_3, A_4) = (A_x, A_y, A_z, i\varphi) = (\vec{A}, i\varphi), \tag{1.5}$$

де $\vec{A}$ – тривимірний вектор. Назвемо

A_μ – чотиривимірним потенціалом електромагнітного поля,

$\vec{A}$ – векторним потенціалом,

φ – скалярним потенціалом.

У загальному випадку векторний і скалярний потенціали є функціями координат і часу: $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$, $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$.

Отже, функціонал дії має вигляд (з точністю до коефіцієнта)

$$S_{mf} \sim e\int_a^b A_\mu dx_\mu. \tag{1.6}$$

Остаточно представимо функціонал дії таким чином:

$$S_{mf} = \frac{e}{c}\int_a^b A_\mu dx_\mu. \tag{1.7}$$

У (1.7) вектор A_μ підлягає подальшому визначенню, а коефіцієнт $1/c$ введено для забезпечення розмірності.

Таким чином, *функціонал дії зарядженої частинки в електромагнітному полі* має вигляд:

$$S = S_m + S_{mf} = -m_0 c\int_a^b \sqrt{-dx_\mu^2} + \frac{e}{c}\int_a^b A_\mu dx_\mu. \tag{1.8}$$

Отримаємо вираз для функції Лагранжа для зарядженої частинки в електромагнітному полі. З теоретичної механіки відомо, що відповідно до (Е.2)

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L dt. \tag{1.9}$$

Тому для визначення L ми повинні у виразі для функціонала дії перейти до інтеграла за часом, тоді підінтегральний вираз дасть нам шукану функцію Лагранжа.

$$\begin{aligned} S &= -m_0 c\int_a^b \sqrt{-dx_\mu^2} + \frac{e}{c}\int_a^b A_\mu dx_\mu = \\ &= \int_a^b \Big[-m_0 c\sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} + \\ &+ \frac{e}{c}\left(A_x dx + A_y dy + A_z dz + i\varphi \cdot icdt\right)\Big] = \\ &= \int_{t_a}^{t_b} dt\left[-m_0 c^2\sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{e}{c}\vec{A}\frac{d\vec{r}}{dt} - e\varphi\right]. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Тут скалярний добуток $A_\mu dx_\mu = A_x dx + A_y dy + A_z dz + i\varphi \cdot icdt$; $A_x dx + A_y dy + A_z dz = \vec{A} \cdot d\vec{r}$; $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ – вектор швидкості.

Таким чином, *функціонал дії зарядженої частинки в електромагнітному полі* запишеться так:

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\varphi \right]. \tag{1.11}$$

Порівнюючи (1.11) з (1.9), отримуємо, що *функція Лагранжа зарядженої частинки в електромагнітному полі* дорівнює

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\varphi = L_m + L_{mf}. \tag{1.12}$$

Тут частина L_m обумовлена наявністю у частинки маси, а L_{mf} виникає внаслідок наявності у частинки заряду. За відсутності заряду ($e \equiv 0$) $L_{mf} \equiv 0$ і $L = L_m$.

У релятивістській механіці імпульс визначається таким чином (див. (Е.5)):

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \nabla_v L, \quad (e \equiv 0), \tag{1.13}$$

де $\dot{q}$ – узагальнена швидкість, $\nabla_v L$ – градієнт функції Лагранжа за швидкістю:

$$\nabla_v L = \vec{x}_0 \frac{\partial L}{\partial v_x} + \vec{y}_0 \frac{\partial L}{\partial v_y} + \vec{z}_0 \frac{\partial L}{\partial v_z}.$$

Збережемо визначення для імпульсу і в електродинаміці, підставляючи замість L вираз для функції Лагранжа зарядженої частинки в електромагнітному полі:

$$\vec{\mathcal{P}} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \nabla_v L = \nabla_v (L_m + L_{mf}). \tag{1.14}$$

У релятивістській механіці отримано вираз для тривимірного релятивістського механічного імпульсу (Е.12):

$$\vec{P} = \nabla_v L_m = \nabla_v (-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2}) = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \tag{1.15}$$

$$\nabla_v L_{mf} = \nabla_v \left(\frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\varphi \right) =$$
$$= \nabla_v \left(\frac{e}{c} A_x v_x + \frac{e}{c} A_y v_y + \frac{e}{c} A_z v_z \right) - \nabla_v (e\varphi) = \frac{e}{c} \vec{A}.$$

$\nabla_v (e\varphi) = 0$, тому що $e = \text{const}$, φ не залежить від швидкості.

Тоді *узагальнений імпульс зарядженої частинки в електромагнітному полі*

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}. \tag{1.16}$$

Якщо $e = 0$, то узагальнений імпульс дорівнює механічному:

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{P} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \tag{1.17}$$

Фізичний зміст векторного потенціалу: векторний потенціал з точністю до множника є додатком до механічного імпульсу за рахунок наявності заряду й електромагнітного поля.

У релятивістській механіці ($e \equiv 0$) енергія визначається співвідношенням (Е.7)

$$\mathcal{E} = \vec{P} \cdot \vec{v} - L \quad (L = L_m). \tag{1.18}$$

За аналогією:

$$\mathcal{E} = \vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{v} - L \quad (L = L_m + L_{mf}). \tag{1.19}$$

$$\mathcal{E} = \left(\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{v} - \left(-m_0c^2\sqrt{1 - v^2 / c^2} + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} - e\varphi\right) =$$
$$= \frac{m_0\vec{v}\cdot\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} + m_0c^2\sqrt{1 - v^2 / c^2} - \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} + e\varphi =$$
$$= \frac{m_0v^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + m_0c^2\sqrt{1 - v^2 / c^2} + e\varphi =$$
$$= \frac{m_0v^2 + m_0c^2(1 - v^2 / c^2)}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + e\varphi = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + e\varphi.$$

Таким чином, енергія зарядженої частинки в електромагнітному полі визначається формулою

$$\mathcal{E} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + e\varphi. \tag{1.20}$$

При цьому перший доданок залежить тільки від швидкості, тому це кінетична енергія частинки $\mathcal{E}_k$. Другий доданок являє собою потенціальну енергію U.

Звідси випливає *фізичний зміст скалярного потенціалу* – це з точністю до множника додаток до енергії за рахунок електромагнітного поля. $U = e\varphi$ – потенціальна енергія.

За визначенням *функція Гамільтона* – це повна енергія, яку виражено через узагальнені координати й узагальнені імпульси

$$H = H(q, p, t) = \mathcal{E}. \tag{1.21}$$

Для отримання виразу для функції Гамільтона зарядженої частинки в електромагнітному полі необхідно представити повну енергію $\mathcal{E}$ через узагальнений імпульс.

Із формули для повної енергії випливає

$$H - e\varphi = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{H - e\varphi}{c}\right)^2 = \frac{m_0^2c^2}{1 - v^2 / c^2}.$$

Використовуючи вираз для узагальненого імпульсу, одержуємо

$$\vec{\mathcal{P}} - \frac{e}{c}\vec{A} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

З допоміжного співвідношення

$$\left(\vec{\mathcal{P}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + m_0^2c^2 = \left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}\right)^2 + m_0^2c^2 =$$
$$= \frac{m_0^2v^2 + m_0^2c^2(1 - v^2 / c^2)}{1 - v^2 / c^2} = \frac{m_0^2c^2}{1 - v^2 / c^2} = \left(\frac{H - e\varphi}{c}\right)^2$$

маємо

$$\left(\vec{\mathcal{P}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + m_0^2c^2 = \left(\frac{H - e\varphi}{c}\right)^2,$$

звідси автоматично отримуємо вираз для *функції Гамільтона зарядженої частинки в електромагнітному полі*

$$H = c\sqrt{\left(\vec{\mathcal{P}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + m_0^2c^2} + e\varphi, \tag{1.22}$$

тут перший доданок відповідає кінетичній енергії, а другий – потенціальній.

За відсутності заряду $(e \equiv 0)$ й електромагнітного поля отриманий вираз для функції Гамільтона переходить у відомий з релятивістської механіки

$$H = c\sqrt{P^2 + m_0^2c^2}. \tag{1.23}$$

§ 2. Рівняння руху для зарядженої частинки в електромагнітному полі. Сила Лоренца

1. Як вивести рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі на основі релятивістського рівняння руху?
2. Сформулювати постулат сили Лоренца. Дати визначення напруженості електричного і магнітного полів. Як пов'язані векторний і скалярний потенціали із силовими характеристиками електромагнітного поля?
3. Як знайти змінення кінетичної енергії зарядженої частинки в електромагнітному полі. Чому дорівнює робота електромагнітного поля із змінення кінетичної енергії?
4. Визначити поняття ізотропії часу. Як воно відображається в теорії поля?

Із релятивістської механіки відомо, що для будь-якої фізичної системи рівняння руху має вигляд (Е.4)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}, \tag{2.1}$$

функція Лагранжа L конкретизує фізичну систему. Якщо підставити до загального рівняння руху функцію Лагранжа для зарядженої частинки

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} - e\varphi, \tag{2.2}$$

то отримаємо рівняння руху для зарядженої частинки в електромагнітному полі, що характеризується скалярним і векторним потенціалами.

Раніше було одержано (див. (1.15))

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \nabla_v L = \vec{\mathcal{P}} = \vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A}, \quad \vec{P} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{2.3}$$

тут $\vec{\mathcal{P}}$ – узагальнений імпульс зарядженої частинки в електромагнітному полі, $\vec{P}$ – тривимірний релятивістський імпульс.

Нагадаємо, що $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}(t), t)$, $\varphi = \varphi(\vec{r}(t), t)$.

Продиференціюємо за часом вираз (2.3)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}\vec{\mathcal{P}} = \frac{d}{dt}(\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A}) = \frac{d}{dt}\vec{P} + \frac{e}{c}\frac{d}{dt}\vec{A}(\vec{r}(t), t). \tag{2.4}$$

Для зручності розглянемо окремо похідну за часом від $\vec{A}(\vec{r}(t), t)$, скориставшись виразом для повної похідної складної функції декількох змінних.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{A}(\vec{r}(t), t) &= \frac{d}{dt}\vec{A}(x(t), y(t), z(t), t) = \\ &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + v_x\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{A}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Таким чином, остаточно запишемо

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{A}. \tag{2.6}$$

Тоді ліва частина рівняння руху (2.1) має вигляд

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{P}} = \frac{d}{dt}\vec{P} + \frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}(\vec{v}\nabla)\vec{A}. \tag{2.7}$$

Визначимо праву частину рівняння руху (2.1)

$$\frac{\partial L}{\partial q} \equiv \nabla L = \nabla\left(-m_0 c^2\sqrt{1-v^2/c^2} + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} - e\varphi\right) = \\ = \nabla\left(-m_0 c^2\sqrt{1-v^2/c^2}\right) + \frac{e}{c}\nabla(\vec{A}\cdot\vec{v}) - e\nabla\varphi. \qquad (2.8)$$

Вираз $\left(-m_0 c^2\sqrt{1-v^2/c^2}\right)$ не залежить від координат, тому перший доданок дорівнює нулю. Скориставшись відомою векторною тотожністю (A.32) для градієнта скалярного добутку, отримаємо

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{v}) = \left[\vec{A},\mathrm{rot}\,\vec{v}\right] + \left[\vec{v},\mathrm{rot}\,\vec{A}\right] + (\vec{A}\nabla)\vec{v} + (\vec{v}\nabla)\vec{A}. \qquad (2.9)$$

Оскільки швидкість не залежить від координат, то перший і третій доданки у цьому виразі дорівнюють нулю. Тому

$$\nabla L = \frac{e}{c}\left[\vec{v},\mathrm{rot}\,\vec{A}\right] + \frac{e}{c}(\vec{v}\nabla)\vec{A} - e\nabla\varphi. \qquad (2.10)$$

Підставляємо отримані вирази в рівняння руху

$$\frac{d}{dt}\vec{P} + \frac{e}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}(\vec{v}\nabla)\vec{A} = \frac{e}{c}\left[\vec{v},\mathrm{rot}\,\vec{A}\right] + \frac{e}{c}(\vec{v}\nabla)\vec{A} - e\nabla\varphi \qquad (2.11)$$

і одержуємо остаточний вигляд *рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі*

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = e\left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{e}{c}\left[\vec{v},\mathrm{rot}\,\vec{A}\right]. \qquad (2.12)$$

Тут $\vec{P}$ – тривимірний механічний імпульс. Права частина рівняння пропорційна до заряду. Якщо заряд дорівнює нулю, то отримане рівняння переходить у рівняння руху вільної частинки

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = 0. \qquad (2.13)$$

Якщо заряд відрізняється від нуля, то маємо другий закон Ньютона

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}. \qquad (2.14)$$

Із експерименту відомо, що на заряджену частинку в електромагнітному полі діє сила Лоренца, яка є сумою сили Кулона і сили Ампера

$$\vec{F}_L = e\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{e}{c}[\vec{v},\vec{H}(\vec{r},t)] = \vec{F}_K + \vec{F}_A, \\ \vec{F}_K = e\vec{E}, \quad \vec{F}_A = \frac{e}{c}\left[\vec{v},\vec{H}\right]. \qquad (2.15)$$

Сила Кулона паралельна до напруженості електричного поля $\vec{E}$ і не залежить від швидкості руху частинки.

Напруженість електричного поля – силова характеристика електричного поля. Вона дорівнює силі, яка діє з боку електричного поля на одиничний додатний заряд:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_K}{e}. \qquad (2.16)$$

Сила Ампера направлена перпендикулярно векторам швидкості та напруженості магнітного поля $\vec{H}$ і *залежить від швидкості,* таким чином, маємо якісно нову природу сил. *Напруженість магнітного поля* – силова характеристика магнітного поля. Вона дорівнює множнику при швидкості (більш точно, при $\vec{v}/c$) в силі Ампера, яка діє з боку магнітного поля на одиничний додатний заряд.

Якщо

$\vec{E} \neq 0, \quad \vec{H} = 0$, то маємо електричне поле;

$\vec{E} = 0, \quad \vec{H} \neq 0$ – магнітне поле;

$\vec{E} \neq 0, \quad \vec{H} \neq 0$ – електромагнітне поле.

Із релятивістської механіки (виходячи з принципу найменшої дії) отримано рівняння руху для зарядженої частинки в електромагнітному полі

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = e\left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{e}{c}\left[\vec{v}, \operatorname{rot}\vec{A}\right]. \quad (2.17)$$

У правій частині цього рівняння стоїть сила, що діє на заряджену частинку в електромагнітному полі. За визначенням це повинна бути сила Лоренца (2.15). Маємо рівняння руху для зарядженої частинки в електромагнітному полі у вигляді

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = e\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}(\vec{r},t)]. \quad (2.18)$$

Через те, що похідна за часом від імпульсу є силою, то, порівнюючи праві частини рівнянь руху (2.17) і (2.18), можна встановити однозначний *зв'язок між силовими характеристиками (напруженостями) електромагнітного поля і потенціалами:*

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}. \quad (2.19)$$

У § 1 отримано вираз для повної енергії зарядженої частинки в електромагнітному полі (1.20)

$$\mathcal{E} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\varphi,$$

де перший доданок являє собою кінетичну енергію. Нас цікавить $\dfrac{d\mathcal{E}_k}{dt}$.

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \frac{m_0c^2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-2\frac{v}{c^2}\right)\frac{dv}{dt}}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}} =$$
$$= \frac{m_0\frac{d\vec{v}}{dt}}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\frac{d\vec{P}}{dt}. \quad (2.20)$$

Використовуючи вираз для $\dfrac{d\vec{P}}{dt}$ з рівняння руху, отримуємо

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \vec{v}\cdot e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v}\left[\vec{v}, \vec{H}\right]. \quad (2.21)$$

Другий доданок у цьому виразі дорівнює нулю з огляду на властивості змішаного добутку векторів. Таким чином, остаточно маємо

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \vec{v}\cdot e\vec{E} = \vec{v}\cdot\vec{F}_K. \quad (2.22)$$

Змінення кінетичної енергії з часом є робота, яку чинить поле над частинкою за одиницю часу. Вона дорівнює добутку швидкості заряду на силу, з якою на заряд діє електричне поле. Магнітне поле не здійснює роботу над зарядом, що рухається, оскільки сила Ампера перпендикулярна швидкості.

Рівняння механіки інваріантні відносно зміни знака у часу, тобто відносно заміни майбутнього минулим. Таким чином, *у механіці обидва напрями часу еквівалентні.* Тому якщо відповідно до рівнянь механіки можливий будь-який рух, то можливий і зворотний рух, тобто такий рух, при якому система проходить ті ж стани, але у зворотному порядку.

Це справедливо і в теорії поля. При русі в зворотному порядку $t \to -t$; $\vec{v} \to -\vec{v}$; $\vec{P} \to -\vec{P}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{d\vec{P}}{dt} \to \dfrac{d\vec{P}}{dt}$, при цьому рівняння руху не змінюється, якщо замінити $\vec{E} \to \vec{E}$; $\vec{H} \to -\vec{H}$. Крім того, відповідно до (2.19) повинна виконуватися умова $\varphi \to \varphi$; $\vec{A} \to -\vec{A}$.

Таким чином, якщо в електромагнітному полі можливий будь-який рух, то можливий і зворотний рух у полі з $\vec{H} \to -\vec{H}$.

§ 3. Перша пара рівнянь Максвелла

1. Як отримати першу пару рівнянь Максвелла в диференціальній формі?
2. Отримати першу пару рівнянь Максвелла в інтегральній формі. У чому полягає їх фізичний зміст?
3. Як довести, що перша пара рівнянь Максвелла є незамкненою системою рівнянь?

Будемо виходити зі співвідношень (2.19)

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t};$$
$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}.$$

Задача полягає в представленні векторного і скалярного потенціалів $\vec{A}, \varphi$ через напруженості електричного і магнітного поля $\vec{E}, \vec{H}$. Для цього застосуємо операцію rot до виразу для $\vec{E}$:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}. \tag{3.1}$$

Відповідно до відомої векторної тотожності (A.24) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$, а оператор rot і диференціювання за часом можна поміняти місцями. Зважаючи на те, що $\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}$, маємо

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Аналогічно дієм оператором div на вираз для $\vec{H}$:

$$\operatorname{div}\vec{H} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A}. \tag{3.2}$$

Як відомо з векторного аналізу (A.25), div rot $\vec{A} = 0$.

Таким чином, отримуємо *першу пару рівнянь Максвелла*

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \qquad \operatorname{div}\vec{H} = 0. \tag{3.3}$$

Рівняння Максвелла, які були вперше сформульовані в 1860 році, є основними рівняннями електродинаміки.

Отримаємо інтегральне формулювання рівнянь Максвелла. Для цього проінтегруємо обидві частини першого рівняння (3.3) за довільною поверхнею S

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{E}\,d\vec{S} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}d\vec{S}. \tag{3.4}$$

Застосуємо до лівої частини цього виразу теорему Стокса (A.38)

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{E}\,d\vec{S} = \oint_L \vec{E}\,d\vec{l}\,, \tag{3.5}$$

де інтеграл праворуч береться за замкненим контуром L, на який спирається поверхня S. У правій частині (3.4) поміняємо місцями інтегрування і диференціювання за часом. Отримуємо *інтегральне формулювання першого рівняння Максвелла*

$$\oint_L \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{H}\,d\vec{S}\,. \qquad (3.6)$$

Інтеграл від вектора за поверхнею називається *потоком вектора через цю поверхню*, а похідна за часом від цього інтеграла є зміненням потоку вектора. Інтеграл від вектора за замкненим контуром називається циркуляцією вектора, а циркуляція вектора напруженості електричного поля – електрорушійною силою (ЕРС).

Таким чином, *фізичний зміст першого рівняння Максвелла* можна сформулювати так: електрорушійна сила в деякому контурі дорівнює взятому зі зворотним знаком зміненню потоку вектора напруженості магнітного поля через поверхню, що спирається на цей контур. Це відомий закон Фарадея або закон електромагнітної індукції.

Отримаємо інтегральне формулювання другого рівняння (3.3). Для цього проінтегруємо це рівняння за довільним об'ємом V. Згідно з теоремою Остроградського–Гаусса (А.37) інтеграл за об'ємом від дивергенції вектора дорівнює потоку цього вектора через замкнену поверхню S, яка обмежує цей об'єм V:

$$\int_V \operatorname{div}\vec{H}\,dV = \oint_S \vec{H}\,d\vec{S}\,.$$

Одержуємо *інтегральне формулювання другого рівняння Максвелла:*

$$\oint_S \vec{H}\,d\vec{S} = 0\,. \qquad (3.7)$$

Фізичний зміст другого рівняння Максвелла: потік вектора напруженості магнітного поля через довільну замкнену поверхню дорівнює

нулю. Це виражає закон безперервності силових ліній магнітного поля, тобто факт відсутності в природі магнітних зарядів.

Таким чином, інтегральне формулювання першої пари рівнянь Максвелла має вигляд:

$$\begin{aligned} &\oint_L \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{H}\,d\vec{S};\\ &\oint_S \vec{H}\,d\vec{S} = 0. \end{aligned} \qquad (3.8)$$

Два рівняння Максвелла не визначають повністю властивості поля. Вони визначають лише змінення поля з часом.

Спроектуємо перше рівняння Максвелла на осі декартової системи координат, а в другому рівнянні розпишемо явно оператор дивергенції

$$\begin{aligned} &\left(\operatorname{rot}\vec{E}\right)_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t};\\ &\left(\operatorname{rot}\vec{E}\right)_y = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t};\\ &\left(\operatorname{rot}\vec{E}\right)_z = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t};\\ &\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \qquad (3.9)$$

Маємо 4 скалярні рівняння і 6 невідомих компонент поля. Очевидно, що система двох перших рівнянь Максвелла є незамкненою.

§ 4. Градієнтна інваріантність потенціалів. Умова калібровки потенціалів

1. Як визначаються напруженості електромагнітного поля через потенціали? Чи є однозначним це визначення? Наскільки однозначно визначаються потенціали?
2. У чому полягає градієнтна інваріантність потенціалів?
3. Як сформулювати умови калібровки Лоренца, калібровки Кулона для потенціалів?
4. Як пов'язана градієнтна інваріантність потенціалів з принципом найменшої дії за Гамільтоном?

Випишемо визначення $\vec{E}$ і $\vec{H}$ через потенціали (2.19):

$$\begin{aligned} &\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \\ &\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Згідно з цими співвідношеннями напруженості поля визначені однозначно. Виникає питання, наскільки однозначно визначені потенціали. Виявляється, що тому ж самому полю можуть відповідати різні потенціали, тобто є певна свобода у виборі потенціалів $\vec{A}$ і φ.

Введемо векторний і скалярний потенціали у вигляді

$$\begin{aligned} &\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} f(\vec{r},t); \\ &\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial t}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Тут $f(\vec{r},t)$ – довільна функція. Підставимо $\vec{A}'$ і φ' у співвідношення (4.1) та отримаємо $\vec{E}'$ і $\vec{H}'$:

$$\vec{E}' = -\operatorname{grad}\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}' = -\operatorname{grad}\left(\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \operatorname{grad} f\right) =$$
$$= -\operatorname{grad}\varphi + \frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial f}{\partial t} = \vec{E};$$
$$\vec{H}' = \operatorname{rot}\vec{A}' = \operatorname{rot}\vec{A} + \operatorname{rot}\operatorname{grad} f(\vec{r},t) = \vec{H}.$$

Нами враховано векторну тотожність (А.24) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f(\vec{r},t) = 0$. Зауважимо, що функція $f(\vec{r},t)$ повинна бути двічі диференційовною.

Якщо використати чотиривимірний вектор потенціалу $A_\mu = (\vec{A}, i\varphi)$, то рівняння (4.2) в чотиривимірному просторі запишуться у вигляді

$$A_\mu{}' = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x_\mu}. \tag{4.3}$$

Тут $\dfrac{\partial f}{\partial x_\mu}$ – градієнт за чотирма координатами (x, y, z, ict).

Перетворення потенціалів вигляду (4.2), яке ще називають калібровочним, не змінює поле:

$$\begin{aligned} &\vec{E}' = \vec{E}; \\ &\vec{H}' = \vec{H}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Тому потенціали визначені неоднозначно – векторний потенціал визначено з точністю до градієнта довільної функції координат і часу, а скалярний – з точністю до похідної за часом від тієї ж функції.

Зокрема, до векторного потенціалу можна додати будь-який сталий вектор, а до скалярного – будь-яку сталу. Це видно і безпосередньо з того, що до визначень $\vec{E}$ і $\vec{H}$ входять лише похідні від $\vec{A}$ і φ, і тому додавання до останніх сталих не впливає на напруженості поля.

Фізичний зміст мають лише ті величини, що інваріантні відносно перетворення потенціалів (4.2), тому всі рівняння повинні бути інваріантними відносно цього перетворення. Ця *інваріантність* називається *калібровочною* або *градієнтною*.

Пов'яжемо потенціали між собою й отримаємо умову калібровки для потенціалів електромагнітного поля. Для цього застосуємо оператор div до першого з рівнянь (4.2) і $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ до другого:

$$\operatorname{div}\vec{A}' = \operatorname{div}\vec{A} + \operatorname{div}\operatorname{grad} f(\vec{r},t);$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(\vec{r},t)}{\partial t^2}.$$

Складемо отримані вирази з урахуванням векторної тотожності (A.23) $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \triangle f$

$$\operatorname{div}\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \triangle f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Оберемо функцію *f* таким чином, щоб виконувалось рівняння

$$\triangle f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Це рівняння називається *хвильовим рівнянням*. Тоді

$$\operatorname{div}\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Це співвідношення повинно виконуватись у всіх точках простору, в тому числі й на нескінченності. Поле на нескінченності дорівнює нулю, тому прирівняємо до нуля обидві частини рівності. Таким чином, отримуємо *умову калібровки Лоренца* для потенціалів:

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \tag{4.5}$$

Можна підібрати функцію *f* так, щоб

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0. \tag{4.6}$$

Це *умова калібровки Кулона*.

Під терміном «калібровка» ми розуміємо вибір функції *f*.

Розглянемо точки просторово-часового континуума a і b. Нехай ці точки фіксовані, тобто $\delta x_\mu(a) = 0$ і $\delta x_\mu(b) = 0$. Перехід із точки a до точки b здійснюється відповідно до ПНД (E.3) так, щоб $\delta S = 0$. Для зарядженої частинки в електромагнітному полі функціонал дії має вигляд (1.8)

$$S = S_m + S_{mf} = \int_a^b \left\{ -m_0 c\sqrt{-dx_\mu{}^2} + \frac{e}{c}A_\mu dx_\mu \right\}.$$

Покажемо, що для принципу найменшої дії виконується умова градієнтної інваріантності, тобто він інваріантний відносно перетворення потенціалів (4.2), (4.3). Для цього отримаємо S', підставивши вираз $A_\mu{}' = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x_\mu}$ до співвідношення для S.

$$S' = \int_a^b \left\{ -m_0 c\sqrt{-dx_\mu^2} + \frac{e}{c}A_\mu dx_\mu \right\} + \frac{e}{c}\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_\mu}dx_\mu .$$

Перший інтеграл дорівнює функціоналу дії S. Для другого доданка справедливо

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial f}{\partial x_4}dx_4 \right) = \int_a^b df(x_\nu).$$

Тоді

$$S' = S + \frac{e}{c}\int_a^b df(x_\nu) = S + \frac{e}{c}\left[f(x_\nu)\big|_b - f(x_\nu)\big|_a \right] = S + \text{const}.$$

Знайдемо варіацію S':

$$\delta S' = \delta S + \delta(\text{const}) = 0.$$

Таким чином, $\delta S' = 0$ за умови $\delta x_\mu(a) = 0$ і $\delta x_\mu(b) = 0$, тобто принцип найменшої дії виявляється інваріантним відносно перетворення потенціалів (4.2), (4.3).

§ 5. Релятивістсько-коваріантне рівняння руху заряду в електромагнітному полі. Тензор електромагнітного поля

1. Чому виникає необхідність отримання рівняння руху в коваріантній формі? Як сформулювати в загальному вигляді задачу для отримання рівняння руху в коваріантній формі? В чому полягає специфіка електромагнітного випадку?
2. Як визначити варіацію функціонала дії для зарядженої частинки в електромагнітному полі?
3. Як отримати рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі в релятивістсько-коваріантній формі?
4. Як вводиться тензор електромагнітного поля? У чому полягають його загальні властивості? Як визначити елементи цього тензора через складові (проекції) векторів напруженості електричного і магнітного поля?
5. Які чотири скалярні рівняння містить у собі релятивістсько-коваріантне рівняння руху?

Рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі має вигляд (2.18)

$$\frac{d}{dt}\vec{P}=e\vec{E}(\vec{r},t)+\frac{e}{c}[\vec{v},\vec{H}(\vec{r},t)];\quad \vec{P}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Це рівняння справедливе для тривимірних векторів. Для переходу від однієї інерціальної системи координат до іншої використовуються перетворення Лоренца, які отримані в чотиривимірному просторі. Отже, для використання перетворень Лоренца необхідно мати рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі також у *чотиривимірному просторі*, тобто рівняння руху в *коваріантній формі*.

Розглянемо точки просторово-часового континуума a і b. Припустимо, що ці точки фіксовані, тобто $\delta x_\mu(a)=0$ і $\delta x_\mu(b)=0$. Перехід з точки a до точки b здійснюється згідно з ПНД так, щоб $\delta S=0$. Для зарядженої частинки в електромагнітному полі функціонал дії має вигляд (1.8)

$$S=S_m+S_{mf}=\int_a^b\left\{-m_0c\sqrt{-dx_\mu^{\ 2}}+\frac{e}{c}A_\mu dx_\mu\right\}.$$

Знайдемо варіацію функціонала дії δS.

$$\delta S=\int_a^b\left\{-m_0c\delta\sqrt{-dx_\mu^{\ 2}}+\frac{e}{c}\delta(A_\mu dx_\mu)\right\}.$$

$$\delta\sqrt{-dx_\mu^{\ 2}}=\frac{(-2)dx_\mu\cdot\delta dx_\mu}{2\sqrt{-dx_\mu^{\ 2}}}=-\frac{dx_\mu\cdot\delta dx_\mu}{ds}=-u_\mu d\delta x_\mu.$$

Тут враховано, що $ds=\sqrt{-dx_\mu^{\ 2}}$; $u_\mu=\dfrac{dx_\mu}{ds}$ – чотиривимірний вектор швидкості.

$$\delta(A_\mu dx_\mu)=\delta A_\mu\cdot dx_\mu+A_\mu\cdot\delta dx_\mu=\delta A_\mu\cdot dx_\mu+A_\mu\cdot d\delta x_\mu.$$

В останніх двох співвідношеннях використано $\delta dx_\mu=d\delta x_\mu$.

Тоді варіація функціонала дії дорівнює

$$\delta S=\int_a^b\left\{m_0cu_\mu d\delta x_\mu+\frac{e}{c}A_\mu d\delta x_\mu+\frac{e}{c}\delta A_\mu dx_\mu\right\}.$$

Проінтегрувавши за частинами перші два доданки, одержуємо

$$\delta S=m_0cu_\mu\delta x_\mu\Big|_a^b+\frac{e}{c}A_\mu\delta x_\mu\Big|_a^b-\int_a^b m_0c\,du_\mu\delta x_\mu-$$
$$-\int_a^b\frac{e}{c}dA_\mu\delta x_\mu+\int_a^b\frac{e}{c}\delta A_\mu dx_\mu.$$

Розпишемо

$$dA_\mu \delta x_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} dx_\nu \delta x_\mu;$$

$$\delta A_\mu dx_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \delta x_\nu dx_\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \delta x_\mu dx_\nu.$$

В останньому співвідношенні внаслідок того, що індекси $\mu,\ \nu$ є «німими», здійснено заміну $\mu \leftrightarrow \nu$.

Запишемо варіацію функціонала дії, розділивши та домноживши підінтегральний вираз на ds.

$$\delta S = (m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu)\delta x_\mu \Big|_a^b + \\ + \int_a^b \left\{ -m_0 c \frac{du_\mu}{ds} + \frac{e}{c}\left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \cdot \frac{dx_\nu}{ds} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \cdot \frac{dx_\nu}{ds} \right) \right\} ds \delta x_\mu.$$

З урахуванням того, що $u_\nu = \dfrac{dx_\nu}{ds}$, одержуємо остаточний вираз для варіації функціонала дії зарядженої частинки в електромагнітному полі:

$$\delta S = (m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu)\delta x_\mu \Big|_a^b + \\ + \int_a^b \left\{ -m_0 c \frac{du_\mu}{ds} + \frac{e}{c}\left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) u_\nu \right\} ds \delta x_\mu. \tag{5.1}$$

Згідно з ПНД варіація функціонала дії повинна дорівнювати нулю за умови, що початкова і кінцева точки a і b є фіксованими, тобто $\delta S = 0$ при $\delta x_\mu(a) = 0$ і $\delta x_\mu(b) = 0$.

Тоді

$$(m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu)\delta x_\mu \Big|_a^b = 0.$$

Залишається

$$\int_a^b \left\{ -m_0 c \frac{du_\mu}{ds} + \frac{e}{c}\left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) u_\nu \right\} ds \delta x_\mu = 0.$$

Оскільки точки a і b довільні, отже, нулю дорівнює підінтегральний вираз.

Таким чином, отримуємо *рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі в релятивістсько-коваріантній формі*

$$m_0 c \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c}\left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) u_\nu, \tag{5.2}$$

де $\dfrac{du_\mu}{ds}$ і u_ν – 4-вектори, а $\left(-\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right)$ – 4-тензор другого рангу. До цього рівняння можна застосовувати перетворення Лоренца.

Введемо *тензор електромагнітного поля*

$$F_{\mu\nu} = -\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \tag{5.3}$$

Це тензор другого рангу в чотиривимірному просторі, який характеризується $4^2 = 16$ компонентами:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix}.$$

Тоді рівняння (5.2) запишемо у вигляді

$$m_0 c \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u_\nu. \tag{5.4}$$

Знайдемо $F_{\nu\mu}$:

$$F_{\nu\mu} = -\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = -F_{\mu\nu},$$

тобто тензор електромагнітного поля є антисиметричним, отже, його діагональні елементи дорівнюють нулю (див. додаток В)

$$F_{\nu\nu} = F_{\mu\mu} = 0,$$

і він має вигляд

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ -F_{12} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ -F_{13} & -F_{23} & 0 & F_{34} \\ -F_{14} & -F_{24} & -F_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для визначення явного вигляду компонент тензора електромагнітного поля необхідно знайти шість його компонент $F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{23}, F_{24}, F_{34}$. Виразимо компоненти тензора через проекції векторів напруженості електричного і магнітного поля. Для цього розпишемо вирази для напруженостей поля через потенціали в декартовій системі координат (див. (A.14), (A.16)).

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \tag{5.5}$$

$$= \vec{x}_0\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{y}_0\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{z}_0\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right);$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} =$$
$$= \vec{x}_0\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}\right) + \vec{y}_0\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t}\right) + \vec{z}_0\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}\right). \tag{5.6}$$

Нагадаємо також, що при визначенні $F_{\mu\nu}$ індекси відповідають таким координатам: $1 \to x$; $2 \to y$; $3 \to z$; $4 \to ict$, а 4-вектор потенціалу має вигляд $A_\mu = (\vec{A}, i\varphi) = (A_x, A_y, A_z, i\varphi)$. Тоді з урахуванням (5.5), (5.6) маємо

$$F_{12} = -\frac{\partial A_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} = H_z;$$

$$F_{13} = -\frac{\partial A_1}{\partial x_3} + \frac{\partial A_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial x} = -H_y;$$

$$F_{14} = -\frac{\partial A_1}{\partial x_4} + \frac{\partial A_4}{\partial x_1} = -\frac{\partial A_x}{\partial (ict)} + \frac{\partial (i\varphi)}{\partial x} = -i\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}\right) = -iE_x.$$

Аналогічно

$$F_{23} = H_x; \quad F_{24} = -iE_y; \quad F_{34} = -iE_z.$$

Остаточно тензор електромагнітного поля дорівнює

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

У рівнянні руху зарядженої частинки в електромагнітному полі, яке записане в релятивістсько-коваріантній формі (5.4), індекс μ набуває значень $\mu = 1,2,3,4$, а за індексом ν, що повторюється, відбувається підсумовування від 1 до 4. Таким чином, векторне рівняння (5.4) містить 4 скалярні рівняння, які відповідають чотирьом можливим значенням μ. Отримаємо ці рівняння.

Нехай $\mu = 1$.

$$m_0 c \frac{du_1}{ds} = \frac{e}{c} F_{1\nu} u_\nu = \frac{e}{c}\left(F_{11}u_1 + F_{12}u_2 + F_{13}u_3 + F_{14}u_4\right). \tag{5.8}$$

Тут $u_\mu = \dfrac{dx_\mu}{ds}$ – компоненти *чотиривимірного вектора швидкості*. З урахуванням того, що $x_1 \to x; x_2 \to y; x_3 \to z; x_4 \to ict$ і $ds = cdt\sqrt{1 - v^2 / c^2}$, ці компоненти мають вигляд

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_x}{c\sqrt{1 - v^2 / c^2}}; \quad u_2 = \frac{v_y}{c\sqrt{1 - v^2 / c^2}}; \\ u_3 &= \frac{v_z}{c\sqrt{1 - v^2 / c^2}}; \quad u_4 = \frac{i}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Підставляючи ці значення, а також відповідні вирази для компонент тензора електромагнітного поля (5.7) у (5.8), отримаємо

$$\frac{d\left(\dfrac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}\right)}{dt} = eE_x + \frac{e}{c}\left(v_y H_z - v_z H_y\right).$$

Вираз, що диференціюється за часом, є проекція тривимірного релятивістського механічного імпульсу на вісь Ox, а $\left(v_y H_z - v_z H_y\right) = \left[\vec{v}, \vec{H}\right]_x$. Остаточно маємо, що при $\mu = 1$ рівнянню (5.4) відповідає скалярне рівняння, яке є проекцією на вісь Ox тривимірного рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі

$$\frac{dP_x}{dt} = eE_x + \frac{e}{c}\left[\vec{v}, \vec{H}\right]_x.$$

Розмірковуючи аналогічно, приходимо до висновку, що при $\mu = 2$ і $\mu = 3$ маємо проекції цього рівняння на осі Oy і Oz

$$\frac{dP_y}{dt} = eE_y + \frac{e}{c}\left[\vec{v}, \vec{H}\right]_y;$$
$$\frac{dP_z}{dt} = eE_z + \frac{e}{c}\left[\vec{v}, \vec{H}\right]_z.$$

Таким чином, при $\mu = 1,2,3$ рівняння руху в релятивістсько-коваріантній формі (5.4) дає проекції на осі координат тривимірного рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі. Якщо ці рівняння домножити на відповідні орти і скласти, то отримаємо векторне рівняння руху (2.18)

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}].$$

Розглянемо $\mu = 4$.

$$m_0 c \frac{du_4}{ds} = \frac{e}{c} F_{4\nu} u_\nu = \frac{e}{c}\left(F_{41}u_1 + F_{42}u_2 + F_{43}u_3 + F_{44}u_4\right).$$

Після підстановки компонент 4-вектора швидкості і відповідних значень компонент тензора електромагнітного поля одержимо

$$\frac{d\left(\dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}\right)}{dt} = e\left(v_x E_x + v_y E_y + v_z E_z\right).$$

Величина ліворуч, що диференціюється, є кінетична енергія. Таким чином, при $\mu = 4$ маємо отриману нами раніше формулу змінення кінетичної енергії (2.22)

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \vec{v} \cdot e\vec{E} = \vec{v} \cdot \vec{F}_K,$$

згідно з якою змінення кінетичної енергії дорівнює скалярному добутку сили Кулона на вектор швидкості.

§ 6. Чотиривимірний вектор імпульсу зарядженої частинки в електромагнітному полі

1. Як сформулювати задачу з відшукання 4-вектора імпульсу в загальному випадку?
2. Як визначити 4-вектор імпульсу зарядженої частинки в електромагнітному полі та його складові?
3. Отримати рівняння Гамільтона–Якобі в релятивістсько-коваріантній формі.

Нехай є дві світові точки a і b: точка a фіксована ($\delta x_\mu(a)=0$), а точка b вільна ($\delta x_\mu(b)\neq 0$). Перехід системи з точки a до точки b відбувається по справжній траєкторії, тобто виконується рівняння руху (5.4)

$$m_0 c\frac{du_\mu}{ds}=\frac{e}{c}F_{\mu\nu}u_\nu .$$

Знайдемо варіацію функціонала дії S як функцію координат (при русі за справжньою траєкторією).

Із релятивістської механіки відомо, що

$$\delta S=\mathcal{P}_\mu \delta x_\mu(b), \qquad (6.1)$$

де $\mathcal{P}_\mu$ – чотиривимірний узагальнений імпульс.

Специфіка електродинаміки полягає у відповідному записі функціонала дії.

При визначенні варіації функціонала дії раніше було отримано вираз (5.1)

$$\delta S=(m_0 c u_\mu+\frac{e}{c}A_\mu)\delta x_\mu(b)-(m_0 c u_\mu+\frac{e}{c}A_\mu)\delta x_\mu(a)+$$
$$+\int_a^b\left\{-m_0 c\frac{du_\mu}{ds}+\frac{e}{c}\left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}+\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right)u_\nu\right\}ds\delta x_\mu .$$

Оскільки точка a фіксована, тобто $\delta x_\mu(a)=0$, то другий доданок дорівнює нулю. Нулю також дорівнює й підінтегральний вираз, тому що рух здійснюється по справжній траєкторії, тобто виконується рівняння руху.

Тоді варіація функціонала дії дорівнює

$$\delta S=(m_0 c u_\mu+\frac{e}{c}A_\mu)\delta x_\mu(b). \qquad (6.2)$$

Порівнюючи формули (6.2) і (6.1), отримуємо вирази для *чотиривимірного вектора імпульсу зарядженої частинки в електромагнітному полі*

$$\mathcal{P}_\mu=m_0 c u_\mu+\frac{e}{c}A_\mu,\quad \mu=1,2,3,4. \qquad (6.3)$$

Визначимо тепер компоненти 4-вектора імпульсу. Для цього скористаємось виразами для компонент 4-вектора швидкості (5.9)

$$u_1=\frac{v_x}{c\sqrt{1-v^2/c^2}};\ u_2=\frac{v_y}{c\sqrt{1-v^2/c^2}};$$
$$u_3=\frac{v_z}{c\sqrt{1-v^2/c^2}};\ u_4=\frac{i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

і 4-вектора потенціалу $A_\mu=(\vec{A},i\varphi)=(A_x,A_y,A_z,i\varphi)$.

Нехай $\mu=1$.

$$\mathcal{P}_1=m_0 c u_1+\frac{e}{c}A_1=m_0 c\frac{v_x}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{e}{c}A_x=P_x+\frac{e}{c}A_x . \qquad (6.4)$$

Аналогічно при $\mu=2$ і $\mu=3$ маємо

$$\mathcal{P}_2 = P_y + \frac{e}{c} A_y; \tag{6.5}$$

$$\mathcal{P}_3 = P_z + \frac{e}{c} A_z. \tag{6.6}$$

Якщо співвідношення (6.4), (6.5) і (6.6) домножити на орти декартової системи координат і скласти, то одержимо вираз для узагальненого імпульсу (2.3)

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A}.$$

Розглянемо $\mu = 4$.

$$\mathcal{P}_4 = m_0 c u_4 + \frac{e}{c} A_4 = m_0 c \frac{i}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + \frac{e}{c} i\varphi =$$
$$= \frac{i}{c}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + e\varphi\right) = \frac{i}{c}(\mathcal{E}_k + U) = i\frac{\mathcal{E}}{c},$$

де $\mathcal{E}_k, U$ – кінетична і потенціальна енергія, а $\mathcal{E}$ – повна енергія частинки в електромагнітному полі.

Таким чином, чотиривимірний вектор імпульсу зарядженої частинки в електромагнітному полі має такі компоненти:

$$\mu = 1,2,3, \quad \vec{\mathcal{P}} = \vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A}; \tag{6.7}$$

$$\mu = 4, \quad \mathcal{P}_4 = i\frac{\mathcal{E}}{c}. \tag{6.8}$$

Отримаємо рівняння Гамільтона–Якобі. Для цього розпишемо варіацію функціонала дії як функцію координат ($S = S(x_\mu)$)

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial x_\mu}\delta x_\mu(b). \tag{6.9}$$

Порівнявши цей вираз з (6.1), маємо

$$\mathcal{P}_\mu = \frac{\partial S}{\partial x_\mu}. \tag{6.10}$$

Прирівняємо варіацію функціонала дії, записану у вигляді (6.9) та (6.2), і одержимо

$$m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu = \frac{\partial S}{\partial x_\mu}.$$

Перепишемо цей вираз у вигляді

$$\frac{\partial S}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c} A_\mu = m_0 c u_\mu$$

і піднесемо обидві частини рівності в квадрат. Врахуємо при цьому, що

$$u_\mu{}^2 = \frac{dx_\mu{}^2}{dS^2} = -\frac{dx_\mu{}^2}{dx_\mu{}^2} = -1,$$

оскільки $dS = \sqrt{-dx_\mu{}^2}$. Таким чином, отримуємо *рівняння Гамільтона–Якобі в релятивістсько-коваріантній формі*

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c} A_\mu\right)^2 = -m_0{}^2 c^2. \tag{6.11}$$

§ 7. Властивості перетворення Лоренца стосовно векторних і тензорних величин з теорії електромагнітного поля

1. Які чотиривимірні векторні і тензорні величини було введено в теорії поля?
2. Як сформулювати пряме і зворотне перетворення Лоренца в матричній формі? У чому полягає властивість ортогональності матриці перетворення Лоренца?
3. Як формулюється властивість скалярного добутку пари довільних 4-векторів?
4. Дати визначення 4-тензора 2 рангу $A_{\mu\nu}$. Сформулювати умову тензорності матриці $A_{\mu\nu}$.

У мікроскопічній електродинаміці вводились такі чотиривимірні величини:

радіус-вектор (координати)	$x_\mu = (\vec{r}, ict); \quad \vec{r} = (x, y, z)$
швидкість	$u_\mu = (\dfrac{\vec{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}, \dfrac{i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}); \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$
потенціал	$A_\mu = (\vec{A}, i\varphi); \quad \vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$
узагальнений імпульс	$\mathcal{P}_\mu = (\vec{\mathcal{P}}, i\dfrac{\mathcal{E}}{c}); \quad \vec{\mathcal{P}} = \vec{P} + \dfrac{e}{c}\vec{A}; \quad \mathcal{E} = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + e\varphi$
тензор електромагнітного поля	$F_{\mu\nu} = -\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}$

Запишемо прямі перетворення Лоренца для координат x, y, z, t (див. (D.3)):

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \dfrac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Нагадаємо, що великою буквою V позначається швидкість однієї системи відліку відносно іншої. Для визначеності будемо вважати, що ця швидкість направлена уздовж осі Ox. Перепишемо перетворення для координат x_μ $(x_1 = x; x_2 = y; x_3 = z; x_4 = ict)$. Для цього виразимо $t = \dfrac{x_4}{ic} = -i\dfrac{x_4}{c}$; $t' = \dfrac{x_4'}{ic} = -i\dfrac{x_4'}{c}$. Тоді

$$x_1 = \frac{x_1' - i\dfrac{V}{c}x_4'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad x_2 = x_2'; \quad x_3 = x_3'; \quad x_4 = \frac{x_4' + i\dfrac{V}{c}x_1'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \quad (7.1)$$

Запишемо ці перетворення в матричній формі.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \dfrac{-iV/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{iV/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1' - i\dfrac{V}{c}x_4'}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ x_2' \\ x_3' \\ \dfrac{i\dfrac{V}{c}x_1' + x_4'}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Введемо *матрицю перетворення Лоренца*

$$\alpha_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \dfrac{-iV/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{iV/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

Тоді *прямі перетворення Лоренца* можна записати у вигляді

$$x_\mu = \alpha_{\mu\nu} x'_\nu. \tag{7.4}$$

Наявність індексу, що повторюється, вказує на те, що за цим індексом відбувається підсумовування (такі індекси називаються «німими»).

Доведемо, що матриця перетворення Лоренца має властивість ортогональності (див. додаток B). Скористаємось для цього тим фактом, що квадрат інтервалу є величиною інваріантною відносно перетворень Лоренца (додатки B, D).

$$s^2 = s'^2; \quad s = \sqrt{-x_\mu^2}; \quad s' = \sqrt{-x'^2_\nu}.$$

Тоді

$$x_\mu^2 = x'^2_\nu;$$

$$x_\mu^2 = x_\mu x_\mu = \alpha_{\mu\nu} x'_\nu \alpha_{\mu\lambda} x'_\lambda = \alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\lambda} x'_\nu x'_\lambda.$$

З іншого боку,

$$x'^2_\nu = x'_\nu x'_\nu.$$

$$\alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\lambda} x'_\nu x'_\lambda = x'_\nu x'_\nu.$$

Остання рівність є справедливою за умови

$$\alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda} = \begin{cases} 1, & \nu = \lambda; \\ 0, & \nu \neq \lambda. \end{cases} \tag{7.5}$$

Це *умова ортогональності матриці.* Отже, перетворення Лоренца є ортогональним перетворенням.

Запишемо зворотне перетворення Лоренца. Для цього домножимо (7.4) на $\alpha_{\mu\lambda}$, скористаємося умовою ортогональності матриці (7.5)

$$\alpha_{\mu\lambda} x_\mu = \alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\mu\nu} x'_\nu$$

і одержимо *зворотні перетворення Лоренца*

$$x'_\lambda = \alpha_{\mu\lambda} x_\mu. \tag{7.6}$$

Покажемо, що скалярний добуток двох довільних векторів є інваріантним відносно перетворень Лоренца. Введемо довільні вектори A_μ, B_μ. Запишемо їх скалярний добуток і застосуємо до кожного з векторів пряме перетворення Лоренца

$$A_\mu B_\mu = \alpha_{\mu\nu} A'_\nu \alpha_{\mu\lambda} B'_\lambda = \alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\lambda} A'_\nu B'_\lambda = \delta_{\nu\lambda} A'_\nu B'_\lambda = A'_\nu B'_\nu.$$

Таким чином, отримуємо, що *скалярний добуток двох довільних векторів є інваріантним відносно перетворень Лоренца*

$$A_\mu B_\mu = A'_\nu B'_\nu. \tag{7.7}$$

Як наслідок, квадрат довжини 4-вектора – інваріант відносно перетворень Лоренца

$$A_\mu A_\mu = A'_\nu A'_\nu. \tag{7.8}$$

Тензором першого рангу в чотиривимірному просторі (4-вектором) називається сукупність чотирьох величин, які при перетворенні системи координат перетворюються за законом

$$A_\mu = \alpha_{\mu\nu} A'_\nu; \quad A'_\lambda = \alpha_{\mu\lambda} A_\mu. \tag{7.9}$$

Тензором другого рангу в чотиривимірному просторі називається сукупність шістнадцяти величин, які при перетворенні системи координат перетворюються за законом

$$A_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\sigma} A'_{\lambda\sigma}. \tag{7.10}$$

Сформулюємо *критерій тензорності матриці* $A_{\mu\nu}$. Введемо до розгляду два 4-вектори B_μ, C_ν і побудуємо функціонал (квадратичну форму):

$$F = A_{\mu\nu} B_\mu C_\nu; \quad F' = A'_{\lambda\sigma} B'_\lambda C'_\sigma.$$

Покажемо, що якщо $A_{\mu\nu}$ – тензор другого рангу, то $F = F'$, тобто функціонал є інваріантом відносно перетворень Лоренца. Розглянемо F', врахуємо при цьому, що B_μ, C_ν – вектори, і для них виконується перетворення вигляду (7.9)

$$F' = A'_{\lambda\sigma} B'_\lambda C'_\sigma = A'_{\lambda\sigma}\alpha_{\mu\lambda} B_\mu \alpha_{\nu\sigma} C_\nu = \alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\sigma} A'_{\lambda\sigma} B_\mu C_\nu.$$

Якщо має місце рівність

$$A_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\sigma} A'_{\lambda\sigma},$$

то

$$F' = A'_{\lambda\sigma} B'_\lambda C'_\sigma = A_{\mu\nu} B_\mu C_\nu = F.$$

Таким чином, якщо $F = F'$, то $A_{\mu\nu}$ – тензор другого рангу.

§ 8. Перетворення Лоренца для електромагнітного поля

1. Як отримати формули прямого і зворотного перетворення Лоренца для чотиривимірного векторного потенціалу?
2. Вивести формули перетворень Лоренца для елементів тензора електромагнітного поля.
3. Отримати прямі та зворотні перетворення Лоренца для компонент векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої.
4. Якого вигляду набувають формули перетворення Лоренца для векторів напруженостей електромагнітного поля в нерелятивістському випадку?

Електромагнітне поле характеризується двома величинами $\vec{E}$ і $\vec{H}$ (або $\vec{A}$ і φ)

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}.$$

З'ясуємо, як зміниться поле при переході від однієї інерціальної системи відліку (ІСВ) до іншої.

Одержимо формули перетворення Лоренца для чотиривимірного векторного потенціалу A_μ

$$A_\mu = (A_1, A_2, A_3, A_4) = (A_x, A_y, A_z, i\varphi). \tag{8.1}$$

Нехай в системі K' потенціал A'_ν відомий. Необхідно знайти потенціал A_μ у системі K.

Для вектора в чотиривимірному просторі відомий закон перетворення компонент (7.4) – прямі перетворення Лоренца. Отже, справедливим є вираз

$$A_\mu = \alpha_{\mu\nu} A'_\nu, \tag{8.2}$$

де $\alpha_{\mu\nu}$ – матриця перетворення Лоренца (7.3). Введемо

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}. \tag{8.3}$$

Тоді

$$\alpha_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\dfrac{V}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\dfrac{V}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

Отримаємо формули перетворень Лоренца для компонент вектора потенціалу.

Нехай $\mu = 1$.

$$A_1 = \alpha_{1\nu} A'_\nu = \alpha_{11} A'_1 + \alpha_{12} A'_2 + \alpha_{13} A'_3 + \alpha_{14} A'_4.$$

Згідно з (8.4) $\alpha_{12} = \alpha_{13} = 0$, $\alpha_{11} = \gamma$, $\alpha_{14} = -i\dfrac{V}{c}\gamma$. З урахуванням (8.1) одержимо

$$A_x = \gamma (A'_x + \frac{V}{c}\varphi').$$

Розмірковуючи аналогічно, можна отримати, що при $\mu = 2$

$$A_y = A'_y,$$

а при $\mu = 3$

$$A_z = A'_z.$$

Розглянемо $\mu = 4$:

$$A_4 = \alpha_{4\nu} A'_\nu = \alpha_{41} A'_1 + \alpha_{42} A'_2 + \alpha_{43} A'_3 + \alpha_{44} A'_4.$$

Відповідно до (8.4) і (8.1) одержимо

$$i\varphi = \gamma \left(i\varphi' + i\frac{V}{c} A'_x \right).$$

Запишемо *прямі перетворення Лоренца для чотиривимірного вектора потенціалу*

$$A_x = \frac{A'_x + \dfrac{V}{c}\varphi'}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}; \quad A_y = A'_y; \quad A_z = A'_z; \quad \varphi = \frac{\varphi' + \dfrac{V}{c} A'_x}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}. \tag{8.5}$$

Зворотні перетворення Лоренца для чотиривимірного вектора потенціалу витікають з (8.5) за допомогою заміни $V \to -V$:

$$A'_x = \frac{A_x - \dfrac{V}{c}\varphi}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}; A'_y = A_y; A'_z = A_z; \varphi' = \frac{\varphi - \dfrac{V}{c} A_x}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}. \tag{8.6}$$

Тензор електромагнітного поля є антисиметричним тензором, тобто $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$. Діагональні елементи антисиметричного тензора $F_{\nu\nu} = F_{\mu\mu} = 0$ (додаток В). Нехай у системі K' тензор електромагнітного поля $F'_{\lambda\sigma}$ відомий. Необхідно знайти тензор електромагнітного поля $F_{\mu\nu}$.

$$F'_{\lambda\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & F'_{12} & F'_{13} & F'_{14} \\ -F'_{12} & 0 & F'_{23} & F'_{24} \\ -F'_{13} & -F'_{23} & 0 & F'_{34} \\ -F'_{14} & -F'_{24} & -F'_{34} & 0 \end{pmatrix};$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ -F_{12} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ -F_{13} & -F_{23} & 0 & F_{34} \\ -F_{14} & -F_{24} & -F_{34} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (8.7)$$

Беручи до уваги вигляд тензора електромагнітного поля, треба знайти формули перетворення Лоренца для елементів $F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{23}, F_{24}, F_{34}$. Компоненти тензора другого рангу відповідно до (7.10) перетворюються за законом

$$A_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\sigma}A'_{\lambda\sigma}.$$

Нехай $\mu = 1, \nu = 2$

$$F_{12} = \alpha_{1\lambda}\alpha_{2\sigma}F'_{\lambda\sigma} = \alpha_{1\lambda}(\alpha_{21}F'_{\lambda1} + \alpha_{22}F'_{\lambda2} + \alpha_{23}F'_{\lambda3} + \alpha_{24}F'_{\lambda4}).$$

Згідно з (8.4), єдиний відмінний від нуля елемент другого рядка матриці α – це елемент $\alpha_{22} = 1$. Одержимо

$$F_{12} = \alpha_{1\lambda}F'_{\lambda2} = \alpha_{11}F'_{12} + \alpha_{12}F'_{22} + \alpha_{13}F'_{32} + \alpha_{14}F'_{42}.$$

Підставивши відповідні значення елементів матриці перетворення Лоренца і тензора електромагнітного поля, отримаємо перетворення Лоренца для елемента F_{12}

$$F_{12} = \gamma\left(F'_{12} - i\frac{V}{c}F'_{42}\right).$$

Аналогічно одержимо перетворення Лоренца для інших елементів. Остаточно перетворення Лоренца для елементів тензора електромагнітного поля мають вигляд

$$F_{12} = \frac{F'_{12} - i\frac{V}{c}F'_{42}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad F_{13} = \frac{F'_{13} - i\frac{V}{c}F'_{43}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad F_{14} = F'_{14};$$
$$F_{23} = F'_{23}; \quad F_{24} = \frac{F'_{24} - i\frac{V}{c}F'_{12}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad F_{34} = \frac{F'_{34} - i\frac{V}{c}F'_{13}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \qquad (8.8)$$

Нагадаємо, що інші елементи визначаються, виходячи з властивостей антисиметричного тензора $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$ і $F_{\mu\mu} = 0$.

Електромагнітне поле є відносним, тобто змінюється при переході від однієї системи координат до іншої. Співвідношення (8.5), (8.6) характеризують змінення векторного і скалярного потенціалів електромагнітного поля при переході від однієї системи координат до іншої. Визначимо, як перетворюються компоненти векторів напруженості електричного і магнітного поля. Для цього використаємо формулу (5.7), що визначає тензор електромагнітного поля через компоненти векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}.$$

У системі координат, що рухається, тензор електромагнітного поля

$$F'_{\lambda\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & H'_z & -H'_y & -iE'_x \\ -H'_z & 0 & H'_x & -iE'_y \\ H'_y & -H'_x & 0 & -iE'_z \\ iE'_x & iE'_y & iE'_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Скориставшись перетвореннями (8.8) і підставивши відповідні вирази для компонент тензорів $F_{\mu\nu}$ і $F'_{\lambda\sigma}$ з наведених вище співвідношень, отримуємо *прямі перетворення Лоренца для компонент векторів напруженості електричного і магнітного поля*

$$\begin{aligned} &E_x = E'_x; \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c}H'_z}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}; \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c}H'_y}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}; \\ &H_x = H'_x; \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}; \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Таким чином, вектори напруженості електромагнітного поля є відносними величинами. Зокрема, в одній системі координат електричне або магнітне поле може бути рівним нулю і бути присутнім в іншій системі координат. Наприклад, нехай у системі K': $\vec{H}' = 0; \quad \vec{E}' \neq 0$. Знайдемо напруженості поля в системі K. Відповідно до (8.9)

$$\begin{aligned} &E_x = E'_x; \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}; \quad E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}; \\ &H_x = H'_x = 0; \quad H_y = \frac{-\frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}; \quad H_z = \frac{\frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}. \end{aligned}$$

Очевидно, що в системі K' $\vec{H}' = 0$, а в системі K $\vec{H} \neq 0$.

Отримаємо *зворотні перетворення Лоренца для компонент векторів напруженості електричного і магнітного полів*, замінивши $V \to -V$:

$$\begin{aligned} &E'_x = E_x; \quad E'_y = \frac{E_y - \frac{V}{c}H_z}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}; \quad E'_z = \frac{E_z + \frac{V}{c}H_y}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}; \\ &H'_x = H_x; \quad H'_y = \frac{H_y + \frac{V}{c}E_z}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}; \quad H'_z = \frac{H_z - \frac{V}{c}E_y}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Розглянемо нерелятивістський випадок, тобто будемо вважати, що $1 - V^2 / c^2 \approx 1$. Перетворимо вирази (8.9) для цього випадку. Тоді формули прямих перетворень Лоренца матимуть вигляд

$$\begin{aligned} &E_x = E'_x; \quad E_y = E'_y + \frac{V}{c}H'_z; \quad E_z = E'_z - \frac{V}{c}H'_y; \\ &H_x = H'_x; \quad H_y = H'_y - \frac{V}{c}E'_z; \quad H_z = H'_z + \frac{V}{c}E'_y. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Переформулюємо (8.11) у векторній формі. При цьому врахуємо, що перетворення Лоренца записуються нами для випадку, коли швидкість однієї системи відліку відносно іншої направлена уздовж осі Ox, тобто $\vec{V} = \vec{x}_0 V$. Скористаємося таким допоміжним виразом:

$$\left[\vec{H}', \vec{V}\right] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ H'_x & H'_y & H'_z \\ V & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \cdot 0 + \vec{y}_0 \cdot H'_z \cdot V - \vec{z}_0 \cdot H'_y \cdot V.$$

Тоді прямі перетворення Лоренца у векторній формі запишуться так:

$$\vec{E} = \vec{E}' + \frac{1}{c}\left[\vec{H}', \vec{V}\right]; \quad \vec{H} = \vec{H}' - \frac{1}{c}\left[\vec{E}', \vec{V}\right], \tag{8.12}$$

а зворотні перетворення Лоренца у векторній формі –

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{V}, \vec{H}\right]; \quad \vec{H}' = \vec{H} - \frac{1}{c}\left[\vec{V}, \vec{E}\right]. \tag{8.13}$$

Розглянемо два окремі випадки.

1) Припустимо, що в системі K' $\vec{H}' = 0$; $\vec{E}' \neq 0$. Тоді, виходячи з (8.12), в системі K одержимо

$$\vec{E} = \vec{E}'; \quad \vec{H} = -\frac{1}{c}\left[\vec{E}, \vec{V}\right].$$

2) Нехай в системі K' $\vec{H}' \neq 0$; $\vec{E}' = 0$. Тоді в K

$$\vec{H} = \vec{H}'; \quad \vec{E} = \frac{1}{c}\left[\vec{H}, \vec{V}\right].$$

В обох випадках з огляду на властивості векторного добутку вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ взаємно перпендикулярні. Отже, якщо в якійсь системі координат електричне або магнітне поле дорівнює нулю, то в усіх інших системах координат вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ є взаємно перпендикулярними. Справедливо і зворотне: якщо в якійсь системі координат вектори напруженості $\vec{E}$ і $\vec{H}$ взаємно перпендикулярні (але не дорівнюють один одному), то існує така система координат, в якій поле або чисто електричне, або чисто магнітне.

§ 9. Інваріанти електромагнітного поля

1. Як сформулювати умову інваріантності для потенціалів електромагнітного поля?
2. Отримати і проаналізувати інваріанти векторів напруженості електромагнітного поля.
3. Як отримати перший інваріант електромагнітного поля у вигляді тензора $F_{\mu\nu}$?

Інваріант – це величина, яка не змінюється при переході від однієї системи відліку до іншої.

Як отримано раніше (співвідношення (7.7)), скалярний добуток двох довільних векторів є інваріантом. У випадку рівності цих векторів маємо умову (7.8) інваріантності квадрата довжини вектора

$$A_\mu A_\mu = A'_\nu A'_\nu = \text{inv}.$$

Нехай вектор A_μ – 4-вектор потенціалу. Будемо вважати, що в системі K задано потенціал $A_\mu = (\vec{A}, i\varphi)$, а в K' – потенціал $A'_\nu = (\vec{A}', i\varphi')$. Знайдемо квадрати довжин цих векторів:

$$A_\mu A_\mu = A^2 + (i\varphi)^2 = A^2 - \varphi^2,$$

$$A'_\nu A'_\nu = A'^2 + (i\varphi')^2 = A'^2 - \varphi'^2.$$

З огляду на (7.8), маємо

$$A^2 - \varphi^2 = A'^2 - \varphi'^2 = \text{inv}, \tag{9.1}$$

тобто різниця квадратів векторного і скалярного потенціалів є інваріантом відносно перетворень Лоренца.

Знайдемо інваріанти для векторів напруженості електричного і магнітного поля. Вважатимемо, що в системі K задані вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$, а в K' – вектори $\vec{E}'$ і $\vec{H}'$.

Із тензорного аналізу відомо таке. Нехай $A_{\mu\nu}$ – симетричний (антисиметричний) тензор другого рангу. Такий тензор можна привести до діагонального вигляду (головне значення тензора). Для цього будується характеристичне рівняння, рішенням якого будуть діагональні елементи (головні значення) тензора. Характеристичне рівняння являє собою рівність нулю визначника

$$\left|A_{\mu\nu} - \lambda\delta_{\mu\nu}\right| = 0,$$

де

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розписавши визначник, одержуємо поліном степеня не більше четвертого відносно λ

$$a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5 = 0, \qquad (9.2)$$

корені якого λ_i і будуть головними значеннями тензора.

Головні значення тензора інваріантні відносно перетворень Лоренца, тому і коефіцієнти a_i рівняння (9.2) також інваріантні відносно перетворень Лоренца ($i = 1,2,3,4$).

Тензор електромагнітного поля $F_{\mu\nu}$ є антисиметричним. Побудуємо для нього характеристичне рівняння

$$\left|F_{\mu\nu} - \lambda\delta_{\mu\nu}\right| = 0,$$

корені якого будуть інваріантними відносно перетворень Лоренца, отже, інваріантами будуть і коефіцієнти, що стоять у рівнянні при λ. Ці коефіцієнти будуть виражатися через компоненти тензора $F_{\mu\nu}$, які, в свою чергу, визначаються через компоненти векторів напруженості електричного і магнітного поля. Вказані обставини дозволять нам визначити інваріанти векторів напруженості електромагнітного поля. Враховуючи явний вигляд тензора електромагнітного поля (5.7)

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix},$$

отримаємо характеристичне рівняння у вигляді рівності нулю визначника

$$\begin{vmatrix} -\lambda & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & -\lambda & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & -\lambda & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розписавши визначник, одержуємо характеристичне рівняння у вигляді біквадратного рівняння

$$\lambda^4 + \lambda^2(H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) -$$
$$-(E_xH_x + E_yH_y + E_zH_z)E_xH_x -$$
$$-(E_xH_x + E_yH_y + E_zH_z)E_yH_y -$$
$$-(E_xH_x + E_yH_y + E_zH_z)E_zH_z = 0.$$

Коефіцієнт при λ^2 є різницею квадратів довжин векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$, а вільний член – квадрат їх скалярного добутку

$$\lambda^4 + \lambda^2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2) - \lambda^0(\vec{E},\vec{H})^2 = 0.$$

Коефіцієнти цього рівняння інваріантні відносно перетворень Лоренца

$$\vec{H}^2 - \vec{E}^2 = \text{inv};$$

$$(\vec{E},\vec{H})^2 = \text{inv} \Rightarrow (\vec{E},\vec{H}) = \text{inv}.$$

Отже, отримуємо інваріанти напруженостей електромагнітного поля

$$\begin{aligned}&\vec{H}^2-\vec{E}^2=\text{inv};\\&(\vec{E},\vec{H})=\text{inv}.\end{aligned}\tag{9.3}$$

При цьому перше зі співвідношень (9.3) має назву *першого інваріанта*, а друге – *другого інваріанта електромагнітного поля*.

Таким чином, якщо в системі K задані вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$, а в K' – вектори $\vec{E}'$ і $\vec{H}'$, то мають місце рівності

$$\vec{H}^2-\vec{E}^2=\vec{H}'^2-\vec{E}'^2;$$

$$(\vec{E},\vec{H})=(\vec{E}',\vec{H}').$$

Проаналізуємо отримані вирази.

1) Розглянемо як приклад плоску електромагнітну хвилю[2]. Для плоскої хвилі у вакуумі має місце співвідношення $\left|\vec{E}\right|=\left|\vec{H}\right|$. Тоді перший інваріант дорівнює нулю: $\vec{H}^2-\vec{E}^2=0$, і ця рівність буде справедливою в усіх системах відліку. Очевидно, ця властивість плоскої хвилі зберігається в будь-якій інерціальній системі відліку. Таким чином, якщо в якійсь системі відліку $\left|\vec{E}\right|=\left|\vec{H}\right|$, то довжини цих векторів будуть однаковими і в будь-якій іншій системі відліку.

2) Іншою властивістю плоскої хвилі є той факт, що вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ взаємно перпендикулярні, тобто дорівнює нулю другий інваріант $(\vec{E},\vec{H})=0$. Отже, і в будь-якій іншій системі відліку такий скалярний добуток буде дорівнювати нулю, і ця властивість плоских хвиль зберігається. Таким чином, якщо в якійсь системі відліку електричне і магнітне поля взаємно перпендикулярні, то вони перпендикулярні і в будь-якій іншій інерціальній системі відліку.

[2] Докладніше про плоскі електромагнітні хвилі йдеться у главі 3.

3) Якщо в одній системі відліку електромагнітне поле є переважно магнітним, $\left|\vec{H}\right|>\left|\vec{E}\right|$ (переважно електричним, $\left|\vec{E}\right|>\left|\vec{H}\right|$), то воно буде переважно магнітним (електричним) і в будь-якій іншій системі координат. Цей висновок є наслідком першого інваріанта, оскільки вираз $\vec{H}^2-\vec{E}^2$ повинен зберігати свій знак в усіх системах координат.

4) Другий інваріант також повинен зберігати свій знак в усіх системах координат. Тому якщо в будь-якій системі координат вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ утворюють гострий (тупий) кут, то вони будуть утворювати гострий (тупий) кут і в будь-якій іншій системі координат.

5) Перетвореннями Лоренца завжди можна досягти того, щоб $\vec{E}$ і $\vec{H}$ отримали будь-які значення, що задовольняють лише умові, щоб $\vec{H}^2-\vec{E}^2$ і $(\vec{E},\vec{H})$ мали задані певні значення. Виключенням є випадок, коли обидва інваріанти дорівнюють нулю. В цьому випадку $\vec{E}$ і $\vec{H}$ в усіх системах відліку є рівними за величиною і взаємно перпендикулярними за напрямом.

6) Якщо $(\vec{E},\vec{H})=0$, то завжди можна знайти таку систему відліку, в якій $\vec{E}=0$ або $\vec{H}=0$ (залежно від знака $\vec{H}^2-\vec{E}^2$), тобто поле є чисто електричним або чисто магнітним. Справедливо і зворотне: якщо в якійсь системі відліку $\vec{E}=0$ або $\vec{H}=0$, то в будь-якій іншій системі відліку $\vec{E}$ і $\vec{H}$ взаємно перпендикулярні.

Запишемо перший інваріант у чотиривимірній формі. Тензор електромагнітного поля має вигляд (5.7). Знайдемо $F_{\mu\nu}^2$.

$$F_{\mu\nu}^2=F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu}=\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu}=H_z^2+H_y^2-E_x^2+H_z^2+H_x^2-$$
$$-E_y^2+H_y^2+H_x^2-E_z^2-E_x^2-E_y^2-E_z^2=2(\vec{H}^2-\vec{E}^2).$$

Отримуємо, що

$$F_{\mu\nu}^2=2(\vec{H}^2-\vec{E}^2)=\text{inv}.\tag{9.4}$$

§ 10. Густина заряду. Чотиривимірний вектор густини струму

1. Які проблеми виникають при спробі описати заряджену матеріальну точку в термінах густини заряду? Як вводиться поняття густини заряду?
2. Дати визначення густини заряду за допомогою тривимірної дельта-функції. Чи є густина заряду інваріантом відносно перетворень Лоренца?
3. Як визначається чотиривимірний вектор густини струму? Чому дорівнюють його складові?

У курсі теорії поля досліджуються точкові заряди – матеріальні точки, які, крім маси, мають ще і заряд.

Усі заряди, що існують у природі, можна вважати точковими, тому що елементарні частинки, по суті, є точковими зарядами, а будь-яку складну систему зарядів можна розглядати як сукупність елементарних (точкових) зарядів.

Розглянемо об'єм V, в якому заряд Q розподілений безперервно. Введемо *густину заряду* ρ:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}, \tag{10.1}$$

де dQ – заряд елементарного об'єму dV, $dQ = \rho dV$. Тоді повний заряд об'єму V можна визначити так:

$$Q = \int_V \rho dV. \tag{10.2}$$

У загальному випадку густина заряду є функція координат і часу $\rho = \rho(\vec{r}, t)$.

У дійсності заряди є точковими. Матеріальна точка не має об'єму, тобто $\Delta V \to 0$, тому густина заряду ρ, що визначена згідно з (10.1), буде прагнути до нескінченності.

Це відбувається тому, що ми намагаємось визначити густину дискретного заряду, використовуючи поняття густини заряду, яке введено для безперервного розподілу заряду. Для точкового заряду густина заряду дорівнює нулю скрізь, крім точки, де знаходиться сам заряд, у цій точці $\rho \to \infty$. Отже, ρ для точкового заряду можна записати за допомогою дельта-функції (див. додаток С), яка дозволить пов'язати дискретний розподіл зарядів з безперервним.

Розглянемо об'єм V, в якому зосереджені точкові заряди e_i, що характеризуються радіусами-векторами $\vec{r}_i$; $\vec{r}$ – радіус-вектор точки спостереження – точки, в якій визначаємо густину заряду. Введемо *густину заряду*, скориставшись поняттям δ-функції:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \tag{10.3}$$

Для введеної таким чином густини заряду з огляду на визначення δ-функції виконується умова

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \infty, & \vec{r} = \vec{r}_i; \\ 0, & \vec{r} \neq \vec{r}_i. \end{cases}$$

Знайдемо повний заряд Q об'єму V:

$$Q = \int_V \rho dV = \int_V \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) dV = \sum_{(i)} e_i \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) dV = \sum_{(i)} e_i.$$

Тут ми скористалися властивістю дельта-функції (С.11), оскільки $\vec{r}_i \in V$.

З'ясуємо, чи є густина заряду інваріантом відносно перетворень Лоренца. Заряд об'єму dV визначається так:

$$dQ = \rho dV. \tag{10.4}$$

Заряд dQ є інваріантом, але елементарний об'єм dV – не інваріант (це випливає з перетворень Лоренца). Отже, ρ *не є інваріантом*.

У класичній фізиці густина струму вводилася так:

$$\vec{j} = \rho \vec{v}, \tag{10.5}$$

де $\vec{v}$ – швидкість руху заряджених частинок.

Розглянемо як dV скільки завгодно малий об'єм. dQ – заряд dV. Домножимо (10.4) на dx_μ

$$dQdx_\mu = \rho dV dx_\mu = \rho dV dt \frac{dx_\mu}{dt}. \tag{10.6}$$

Величина, що стоїть ліворуч, є 4-вектором. Тому і праворуч повинен стояти 4-вектор. $dVdt$ є скаляром. Введемо *вектор густини струму* так:

$$j_\mu = \rho \frac{dx_\mu}{dt}; \quad \mu = 1,2,3,4. \tag{10.7}$$

За місцем розташування густини струму в рівнянні (10.6) j_μ є 4-вектором.

Розглянемо послідовно $\mu = 1,2,3,4$, взявши до уваги, що $x_\mu = (x, y, z, ict)$.

$$\mu = 1 \quad j_1 = \rho \frac{dx_1}{dt} = \rho \frac{dx}{dt} = \rho v_x = j_x;$$

$$\mu = 2 \quad j_2 = \rho \frac{dx_2}{dt} = \rho \frac{dy}{dt} = \rho v_y = j_y;$$

$$\mu = 3 \quad j_3 = \rho \frac{dx_3}{dt} = \rho \frac{dz}{dt} = \rho v_z = j_z.$$

Якщо кожне з цих рівнянь домножити на відповідний орт декартової системи координат і скласти, то отримаємо класичний вираз для тривимірного вектора густини струму (10.5)

$$\vec{j} = \rho \vec{v}.$$

Тут $\vec{v}$ – швидкість руху об'єму dV.

$$\mu = 4 \quad j_4 = \rho \frac{dx_4}{dt} = \rho \frac{d(ict)}{dt} = ic\rho.$$

Остаточно маємо, що 4-вектор густини струму дорівнює

$$j_\mu = (\vec{j}, ic\rho). \tag{10.8}$$

Тривимірний вектор густини струму $\vec{j}$, відповідно до (10.5), з урахуванням (10.3) можна записати так:

$$\vec{j} = \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \tag{10.9}$$

§ 11. Закон збереження заряду. Рівняння безперервності

1. Як визначити приріст у часі величини заряду, що міститься в об'ємі, з використанням поняття густини заряду?
2. Як знайти приріст у часі величини заряду в тому ж об'ємі V із застосуванням поняття густини струму?
3. Як вивести закон збереження заряду в інтегральній і диференціальній формі?
4. Отримати закон збереження заряду в релятивістсько-коваріантній формі.

Розглянемо об'єм V, оточений поверхнею S. Всередині об'єму міститься заряд, розподілений з густиною $\rho(\vec{r},t)$. Будемо вважати, що заряди можуть вільно проходити через поверхню S. Введемо до розгляду також одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні $\vec{n}$ і радіус-вектор точки спостереження $\vec{r}$.

Повний заряд Q всередині об'єму V визначається з використанням поняття густини заряду за формулою (10.1)

$$Q = \int\limits_V \rho dV .$$

Для визначення змінення у часі заряду в об'ємі необхідно знайти похідну заряду за часом

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_V \rho dV . \tag{11.1}$$

Оскільки $dt > 0$, то і $dQ > 0$, тобто ми розглядаємо приріст (збільшення) заряду в об'ємі.

З іншого боку, змінення заряду в об'ємі можна знайти, використовуючи поняття густини струму. Змінення заряду в об'ємі за одиницю часу визначається кількістю заряду, що виходить з об'єму V або входить до об'єму V за одиницю часу. Використовуючи визначення швидкості та густини заряду, можна стверджувати, що за одиницю часу через елементарну поверхню $d\vec{S}$ пройде заряд, який дорівнює $\rho\vec{v}d\vec{S}$. Тут $\vec{v}$ – швидкість заряду в точці простору, де знаходиться $d\vec{S}$. Врахуємо, що $d\vec{S} = dS\vec{n}$, де $\vec{n}$ – одиничний вектор *зовнішньої* нормалі до поверхні. Це означає, що вираз $\rho\vec{v}d\vec{S}$ є додатним, якщо заряд виходить з об'єму V, і від'ємним, якщо заряд входить до нього.

Повний заряд, що проходить через замкнену поверхню S за одиницю часу, визначається так:

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint\limits_S \rho\vec{v}d\vec{S} .$$

Знак «мінус» перед інтегралом з'явився тому, що нас цікавить приріст заряду в об'ємі. Скористаємося визначенням тривимірного вектора густини струму $\vec{j} = \rho\vec{v}$. Тоді приріст заряду в об'ємі запишеться так:

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint\limits_S \vec{j}d\vec{S} . \tag{11.2}$$

Введемо поняття повного струму як кількість заряду, що виходить через всю поверхню S за одиницю часу

$$I = \oint\limits_S \vec{j}d\vec{S} . \tag{11.3}$$

Тоді

$$\frac{dQ}{dt}=-I\,.$$

Прирівняємо вирази (11.1) і (11.2) та отримаємо *рівняння безперервності в інтегральній формі*

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV=-\oint_S \vec{j}d\vec{S}\,. \tag{11.4}$$

Це співвідношення за фізичним змістом є *законом збереження заряду*.

Одержимо закон збереження заряду в диференціальній формі, скориставшись теоремою Остроградського–Гаусса

$$\oint_S \vec{j}d\vec{S}=\int_V \operatorname{div}\vec{j}dV\,.$$

Підставимо цей вираз до (11.4)

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV+\int_V \operatorname{div}\vec{j}dV=0\,.$$

Змінимо порядок інтегрування та диференціювання в першому інтегралі й запишемо все під один інтеграл

$$\int_V\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{j}\right)dV=0\,.$$

Через те, що інтегрування відбувається за довільним об’ємом, нулю дорівнює підінтегральний вираз. Одержуємо *рівняння безперервності в диференціальній формі*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{j}=0\,. \tag{11.5}$$

Запишемо рівняння безперервності в релятивістсько-коваріантній формі

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}=0\,. \tag{11.6}$$

$\dfrac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}$ – 4-дивергенція 4-вектора $j_\mu=(\vec{j},ic\rho)$. Переконаємось у справедливості (11.6):

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}=\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}+\frac{\partial(ic\rho)}{\partial(ict)}=\operatorname{div}\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\,.$$

Доведемо, що рівняння безперервності автоматично задовольняється, якщо ρ представлено через δ – функцію. Густина заряду має вигляд

$$\rho=\sum_{(i)}e_i\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\,,$$

а густина струму –

$$\vec{j}=\sum_{(i)}e_i\vec{v}_i\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\,.$$

Нехай для простоти у нас є лише одна частинка із зарядом e і радіусом-вектором $\vec{r}_0$

$$\rho=e\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,,$$

$$\vec{j} = e\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0).$$

Знайдемо $\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$, урахуємо при цьому, що $\vec{v} = \dfrac{\partial \vec{r}_0}{\partial t}$ – швидкість зарядженої частинки

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial r_0}\frac{\partial \vec{r}_0}{\partial t} = \vec{v}\frac{\partial \rho}{\partial r_0}.$$

Оскільки ρ залежить від різниці $\vec{r} - \vec{r}_0$, то

$$\frac{\partial \rho}{\partial r_0} = -\frac{\partial \rho}{\partial r} = -\operatorname{grad}\rho.$$

Тоді

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{v}\operatorname{grad}\rho.$$

Скористаємося векторною тотожністю і врахуємо, що швидкість частинки не залежить від координат

$$\operatorname{div}\rho\vec{v} = \rho\operatorname{div}\vec{v} + \vec{v}\operatorname{grad}\rho = \vec{v}\operatorname{grad}\rho;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}\rho\vec{v} = -\operatorname{div}\vec{j}.$$

Таким чином, отримуємо, що для випадку, який розглядається, виконується рівняння безперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0.$$

§ 12. Функціонал дії для електромагнітного поля

1. Як записати функціонал дії для фізичної системи «заряджена частинка + електромагнітне поле»?
2. Як визначити частину функціонала дії, яка залежить тільки від поля?
3. Який загальний вигляд має функціонал дії для системи, яка складається з електромагнітного поля і заряджених частинок, що в ньому знаходяться?

Як одержано в § 1, функціонал дії для зарядженої частинки, що рухається в *заданому* електромагнітному полі, має вигляд (1.1)

$$S(A_\mu, x_\mu) = S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu), \tag{12.1}$$

де

$$S_m = S_m(x_\mu) = -m_0 c\int_a^b \sqrt{-dx_\mu^2}$$

– функціонал дії для вільної частинки, а

$$S_{mf} = S_{mf}(A_\mu, x_\mu) = \frac{e}{c}\int_a^b A_\mu dx_\mu$$

– функціонал дії, який обумовлено взаємодією зарядженої частинки з електромагнітним полем.

Якщо йдеться про систему частинок, то в силу адитивності функціонал дії системи дорівнює сумі функціоналів дії окремої кожної частинки, що входить до системи:

$$S_m = \sum_{(i)} \left(-m_{0_i} c \int_{a_i}^{b_i} \sqrt{-dx_{\mu_i}^2} \right), \tag{12.2}$$

$$S_{mf} = \sum_{(i)} \frac{e_i}{c} \int_{a_i}^{b_i} A_{\mu_i} dx_{\mu_i} \,. \tag{12.3}$$

Тут підсумовування відбувається за всіма частинками системи, довільна *i*-та частинка характеризується масою m_{0_i}, зарядом e_i, a_i, b_i – відповідно, її початкове і кінцеве положення, x_{μ_i} описує її траєкторію, а A_{μ_i} – потенціал поля в тій точці простору, де знаходиться *i*-та частинка.

Розглянемо тепер *систему, що складається з електромагнітного поля і частинок, які в ньому знаходяться.*

Електромагнітне поле є об’єктивною реальністю, тобто воно існує незалежно від того, внесені до нього пробні заряди чи ні, і більше того, будучи одного разу збудженим джерелами у вигляді електромагнітної хвилі, поле може існувати навіть тоді, коли джерела віддалені на нескінченність. Тому необхідно оперувати з полем як з реальним об’єктом. У даному випадку ми приписуємо йому функціонал дії S_f, який залежить лише від властивостей електромагнітного поля і характеризує поле за відсутності заряджених частинок.

Доки ми цікавились лише рухом зарядів у *заданому* електромагнітному полі, частина функціонала дії, яка характеризує саме поле, в розгляді не враховувалась. Це пояснюється тим, що функціонал дії S_f не залежить від властивостей частинок, отже, не може впливати на виведення рівнянь руху заряджених частинок у заданому електромагнітному полі. При виведенні рівнянь, що визначають саме поле, урахування S_f є обов’язковим. Без урахування S_f ми отримали лише першу пару рівнянь Максвелла, яких недостатньо для визначення поля, система рівнянь виявилася незамкненою.

Сформулюємо вихідні передумови, на основі яких будемо визначати функціонал дії для електромагнітного поля, необхідний для отримання рівнянь електромагнітного поля.

1) Будемо виходити з *принципу суперпозиції,* якому, як відомо з досліджень, підкорюється електромагнітне поле: поле, що утворюється системою зарядів, є результатом векторного додавання полів, які утворюються кожним із зарядів. Це означає, що напруженості результуючого поля в кожній точці дорівнюють векторній сумі напруженостей у цій точці кожного з полів окремо.

2) Усяке рішення рівнянь поля повинно бути полем, яке може існувати в природі. Відповідно до принципу суперпозиції сума будь-яких таких полів також повинна бути полем, яке може існувати в природі, тобто повинно задовольняти рівнянням поля.

3) Лінійні диференціальні рівняння мають таку властивість, що сума будь-яких їх рішень також є рішенням. Отже, рівняння поля повинні бути лінійними диференціальними рівняннями.

4) Оскільки функціонал дії записується у вигляді інтеграла, то зі сказаного вище випливає, що під знаком інтеграла повинен стояти вираз квадратичний по полю. Тільки в цьому випадку рівняння будуть лінійними, тому що рівняння поля отримуються шляхом варіювання функціонала дії, при варіюванні степінь підінтегрального виразу знижується на одиницю.

5) До виразу для S_f не можуть входити потенціали поля, тому що вони визначені неоднозначно (4.2) (у визначенні S_{mf} ця неоднозначність не була суттєвою).

6) Функціонал дії S_f має бути скаляром, тоді і підінтегральний вираз має бути скаляром. І цей скаляр повинен характеризувати поле. Цим вимогам задовольняє $F_{\mu\nu}^2$

$$F_{\mu\nu}^2 = 2\left(\vec{H}^2 - \vec{E}^2\right). \tag{12.4}$$

Таким чином, функціонал дії для електромагнітного поля запишеться у вигляді

$$S_f = a\int_V \int_{t_a}^{t_b} F_{\mu\nu}^2 dVdt, \tag{12.5}$$

де $a = \text{const}$.

Доведемо, що коефіцієнт a повинен бути від'ємним. Під інтегралом стоїть вираз (12.4), поле $\vec{E}$, згідно з (2.19),

$$\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

тобто містить $\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, а $\vec{E}^2$ – відповідно $\left(\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2$. Нехай $a > 0$, і $\left(\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2$ входить до підінтегрального виразу з мінусом. Тоді достатньо швидкою зміною векторного потенціалу $\vec{A}$ у часі завжди можна зробити $\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ скільки завгодно великим, отже, S_f буде від'ємним зі скільки завгодно великим абсолютним значенням

$$\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2 \to \infty \quad \Rightarrow \quad S_f < 0; \quad \left|S_f\right| \to \infty.$$

Тоді S_f не буде мати мінімуму, як того потребує принцип найменшої дії ($\delta S = 0$ – умова мінімуму функціонала дії). Отже, $a < 0$.

Чисельне значення a визначається вибором одиниць вимірювання поля. Після вибору a (тобто вибору одиниць вимірювання поля) однозначно визначаються і одиниці вимірювання всіх інших електромагнітних величин.

Ми користуємось гауссовою системою одиниць, в якій константа a є безрозмірною і чисельно дорівнює $a = -1/16\pi$. Тоді

$$S_f = -\frac{1}{16\pi}\int_V \int_{t_a}^{t_b} F_{\mu\nu}^2 dVdt. \tag{12.6}$$

Тут $dV = dxdydz$.

Врахуємо в (12.6), що згідно з (12.4) $F_{\mu\nu}^2 = 2\left(\vec{H}^2 - \vec{E}^2\right)$. Тоді

$$S_f = \frac{1}{8\pi}\int_V \int_{t_a}^{t_b} \left(\vec{E}^2 - \vec{H}^2\right) dVdt. \tag{12.7}$$

Знайдемо функцію Лагранжа електромагнітного поля. За визначенням (Е.2)

$$S = \int_{t_a}^{t_b} Ldt.$$

Порівнюючи останню формулу з (12.7), одержимо, що функція Лагранжа електромагнітного поля має вигляд

$$L_f = \frac{1}{8\pi}\int_V \left(\vec{E}^2 - \vec{H}^2\right) dV. \tag{12.8}$$

Перейдемо в (12.6) до інтегрування за чотиривимірним об'ємом. Для цього виразимо dt через $d\tau$

$$d\tau = icdt; \quad dt = d\tau / ic = -\frac{i}{c} d\tau .$$

Введемо до розгляду елементарний чотиривимірний об'єм $d\Omega = dxdydzd\tau$ і запишемо (12.6) у вигляді інтеграла за чотиривимірним об'ємом Ω

$$S_f = \frac{i}{16\pi c} \int\limits_{\Omega} F_{\mu\nu}^2 d\Omega. \qquad (12.9)$$

Таким чином, *функціонал дії для фізичної системи, що складається з електромагнітного поля і заряджених частинок, які в ньому знаходяться,* має вигляд

$$S(A_\mu, x_\mu) = S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu) \qquad (12.10)$$

або в явному вигляді

$$S = \sum_{(i)} \left(-m_{0_i} c \int\limits_{a_i}^{b_i} \sqrt{-dx_{\mu_i}^2} \right) + \sum_{(i)} \frac{e_i}{c} \int\limits_{a_i}^{b_i} A_{\mu_i} dx_{\mu_i} + \frac{i}{16\pi c} \int\limits_{\Omega} F_{\mu\nu}^2 d\Omega. \qquad (12.11)$$

Зауважимо, що заряди вже не вважаються малими, як при виводі рівнянь руху зарядів у заданому полі. Отже, A_μ і $F_{\mu\nu}$ характеризують справжнє поле, тобто зовнішнє поле разом з полем, яке утворюється самими зарядами. Тому A_μ і $F_{\mu\nu}$ залежать від положення і швидкості зарядів.

§ 13. Друга пара рівнянь Максвелла

1. Як переконатися в тому, що при використанні в ПНД повного виразу для функціонала дії системи «заряджена частинка + електромагнітне поле» зберігається отриманий раніше результат: рівняння руху для зарядів в електромагнітному полі і перша пара рівнянь Максвелла?
2. Як формулюється варіаційна задача для отримання другої пари рівнянь Максвелла?
3. Як записати вираз для $S_{mf}(A_\mu, x_\mu)$ у вигляді інтеграла за чотиривимірним об'ємом?
4. Як вивести другу пару рівнянь Максвелла в релятивістсько-коваріантній формі? У чому полягає умова випромінювання в теорії поля?
5. З релятивістсько-коваріантного рівняння отримати другу пару рівнянь Максвелла в диференціальній формі для векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$.
6. Як сформулювати другу пару рівнянь Максвелла в інтегральній формі, дати їх фізичну інтерпретацію?
7. Як виглядає перша пара рівнянь Максвелла в релятивістсько-коваріантній формі?

Повний вираз для функціонала дії фізичної системи, що складається з електромагнітного поля і заряджених частинок, які в ньому знаходяться, має вигляд (12.10)

$$S(A_\mu, x_\mu) = S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu)$$

або в явному вигляді (12.11)

$$S = \sum_{(i)} \left(-m_{0_i} c \int_{a_i}^{b_i} \sqrt{-dx_{\mu_i}^2} \right) + \sum_{(i)} \frac{e_i}{c} \int_{a_i}^{b_i} A_{\mu_i} dx_{\mu_i} + \frac{i}{16\pi c} \int_{\Omega} F_{\mu\nu}^2 d\Omega .$$

Зауважимо, що функціонал дії є інваріантом відносно перетворень Лоренца.

Переконаємось в тому, що при використанні в ПНД повного виразу для функціонала дії системи «заряджені частинки + електромагнітне поле» зберігається отриманий раніше результат: рівняння руху для зарядів у електромагнітному полі і перша пара рівнянь Максвелла.

Виходячи з принципу найменшої дії за Гамільтоном, задача формулюється так: розглянемо точки просторово-часового континуума a_i і b_i, які характеризують початкове і кінцеве положення *i*-ї зарядженої частинки. Будемо вважати ці точки фіксованими, тобто $\delta x_\mu \Big|_{a_i} = 0$ і $\delta x_\mu \Big|_{b_i} = 0$. Перехід з точки a_i до точки b_i здійснюється згідно з ПНД так, щоб $\delta S(x_\mu, A_\mu) = 0$.

Варіація записаного нами функціонала дії повинна дорівнювати нулю:

$$\delta S(A_\mu, x_\mu) = \delta \left\{ S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu) \right\} = 0;$$

$$\delta S(A_\mu, x_\mu) = \delta S(A_\mu, x_\mu)\Big|_{A_\mu = \text{const}} + \delta S(A_\mu, x_\mu)\Big|_{x_\mu = \text{const}} = 0. \qquad (13.1)$$

У першому доданку вважається фіксованим поле, а в другому – траєкторія руху частинок. Далі « $=\text{const}$ » будемо для стислості опускати.

Таким чином, отримуємо варіаційну задачу в такій постановці:

$$\begin{aligned} &\delta S(A_\mu, x_\mu) = \delta \left\{ S_m + S_{mf} + S_f \right\}\Big|_{A_\mu} + \delta \left\{ S_m + S_{mf} + S_f \right\}\Big|_{x_\mu} = 0; \\ &\delta x_\mu \Big|_{a_i} = 0; \\ &\delta x_\mu \Big|_{b_i} = 0. \end{aligned} \qquad (13.2)$$

Маємо

$$\begin{aligned} \delta S(A_\mu, x_\mu)\Big|_{A_\mu} &= \delta \left\{ S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu) \right\}\Big|_{A_\mu} = \\ &= \delta S_m(x_\mu)\Big|_{A_\mu} + \delta S_{mf}(A_\mu, x_\mu)\Big|_{A_\mu} + \delta S_f(A_\mu)\Big|_{A_\mu}. \end{aligned}$$

Останній доданок при постійному полі дорівнює нулю.

$$\begin{aligned} \delta S(A_\mu, x_\mu)\Big|_{x_\mu} &= \delta \left\{ S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu) \right\}\Big|_{x_\mu} = \\ &= \delta S_m(x_\mu)\Big|_{x_\mu} + \delta S_{mf}(A_\mu, x_\mu)\Big|_{x_\mu} + \delta S_f(A_\mu)\Big|_{x_\mu}. \end{aligned}$$

У цьому виразі перший доданок дорівнює нулю при заданих траєкторіях.

Розглянемо дві варіаційні задачі окремо: при постійному полі варіюємо траєкторії і при фіксованих траєкторіях варіюємо поле.

Перша варіаційна задача формулюється так:

$$\begin{aligned} &\delta \left\{ S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) \right\}\Big|_{A_\mu} = 0; \\ &\delta x_\mu \Big|_{a_i} = 0; \\ &\delta x_\mu \Big|_{b_i} = 0. \end{aligned} \qquad (13.3)$$

Цю задачу вже розв'язано в § 5. Її результатом було рівняння руху зарядженої частинки в заданому електромагнітному полі, записане в релятивістсько-коваріантній формі (5.4)

$$m_0 c \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u_\nu ,$$

наслідком якого є тривимірне рівняння руху зарядженої частинки в заданому полі (2.18)

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]$$

і перша пара рівнянь Максвелла (3.3)

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t};$$
$$\operatorname{div}\vec{H} = 0.$$

Функціонал дії електромагнітного поля і зарядів, що в ньому знаходяться, який в загальному випадку складається з трьох доданків, для системи, в якій поле вважається заданим, представляється двома доданками, як це нами і передбачалось при розв'язанні першої варіаційної задачі в § 5. Інакше кажучи, використання повного виразу для функціонала дії при постійному полі дає отриманий нами раніше результат.

Для знаходження інших рівнянь для електромагнітного поля, виходячи з ПНД, ми повинні вважати заданим рух зарядженої частинки, а варіювати потенціал поля A_μ. Друга варіаційна задача має вигляд

$$\begin{aligned} &\delta\left\{S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu)\right\}\Big|_{x_\mu} = 0; \\ &\delta x_\mu\Big|_{a_i} = 0; \\ &\delta x_\mu\Big|_{b_i} = 0. \end{aligned} \tag{13.4}$$

Визначимо варіацію функціонала дії, розписавши доданки, що в нього входять, явно

$$\delta\left\{\sum_{(i)}\frac{e_i}{c}\int_{a_i}^{b_i} A_{\mu_i} dx_{\mu_i} + \frac{i}{16\pi c}\int_\Omega F_{\mu\nu}^2 d\Omega\right\}\Bigg|_{x_\mu} = 0.$$

Перетворимо інтеграл, що входить до виразу S_{mf}, до чотиривимірного вигляду. Для цього скористаємось виразом для густини заряду

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i).$$

Тоді повний заряд об'єму V

$$Q = \int_V \rho dV = \sum_{(i)} e_i.$$

Перепишемо вираз S_{mf} і скористаємось властивістю δ-функції (С.12):

$$S_{mf} = \sum_{(i)}\frac{e_i}{c}\int_{a_i}^{b_i} A_{\mu_i} dx_{\mu_i} = \frac{1}{ic^2}\int_V dV \int_{t_a}^{t_b} ic\rho(\vec{r})\frac{dx_\mu}{dt} dt A_\mu.$$

Візьмемо до уваги, що $icdVdt = dVd(ict) = dVd\tau = d\Omega$. Тепер можна перейти до інтеграла за чотиривимірним об'ємом. Застосуємо при цьому визначення чотиривимірного вектора густини струму (10.7)

$$S_{mf} = \frac{1}{ic^2}\int_\Omega \rho\frac{dx_\mu}{dt} A_\mu d\Omega = -\frac{i}{c^2}\int_\Omega j_\mu A_\mu d\Omega.$$

Підставимо S_{mf} до варіаційної задачі:

$$\delta\left\{-\frac{i}{c^2}\int_\Omega j_\mu A_\mu d\Omega + \frac{i}{16\pi c}\int_\Omega F_{\mu\nu}^2 d\Omega\right\}\Bigg|_{x_\mu} = 0,$$

$$-\frac{i}{c}\int_\Omega \delta\left(\frac{1}{c} j_\mu A_\mu - \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}^2\right) d\Omega\Big|_{x_\mu} = 0.$$

Зауважимо, що $j_\mu = j_\mu(x_\mu)$, густина струму не залежить від A_μ. Тому $j_\mu\Big|_{x_\mu} = \mathrm{const}$, тоді $\delta(j_\mu A_\mu) = j_\mu \delta A_\mu$. Отже,

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{c} j_\mu \delta A_\mu - \frac{1}{16\pi}\delta F_{\mu\nu}^2\right) d\Omega\Big|_{x_\mu} = 0.$$

Знайдемо $\delta F_{\mu\nu}^2$, врахуємо при цьому визначення тензора електромагнітного поля (5.3) $F_{\mu\nu} = -\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}$. Тоді

$$\delta F_{\mu\nu}^2 = 2F_{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} = -2F_{\mu\nu}\delta\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right) + 2F_{\mu\nu}\delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right) =$$

$$= -2F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta A_\mu + 2F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta A_\nu.$$

Ми змінили порядок диференціювання і варіювання. Візьмемо до уваги, що тензор електромагнітного поля є антисиметричним, тобто $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$:

$$\delta F_{\mu\nu}^2 = -2F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta A_\mu - 2F_{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta A_\nu.$$

Індекси μ і ν – «німі», тому в другому доданку можемо поміняти їх місцями.

$$\delta F_{\mu\nu}^2 = -2F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta A_\mu - 2F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta A_\mu = -4F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta A_\mu.$$

Варіаційна задача набуде вигляду

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{c}j_\mu\delta A_\mu + \frac{1}{4\pi}F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta A_\mu\right)d\Omega\Big|_{x_\mu} = 0.$$

Розглянемо 4-вектор, що задано добутком $F_{\mu\nu}\delta A_\mu$, в якому за індексом μ відбувається підсумовування, а $\nu = 1,2,3,4$. За визначенням, дивергенція в чотиривимірному просторі від 4-вектора дорівнює $\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(F_{\mu\nu}\delta A_\mu\right)$. З іншого боку, ця похідна може бути визначена так:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(F_{\mu\nu}\delta A_\mu\right) = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\delta A_\mu + F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta A_\mu.$$

Виразимо другий доданок:

$$F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta A_\mu = -\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\delta A_\mu + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(F_{\mu\nu}\delta A_\mu\right).$$

Підставимо останній вираз до варіаційної задачі й запишемо у вигляді двох інтегралів

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{c}j_\mu\delta A_\mu - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\delta A_\mu\right)\Big|_{x_\mu} d\Omega + \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(F_{\mu\nu}\delta A_\mu\right)\Big|_{x_\mu} d\Omega = 0.$$

Скористаємось теоремою Остроградського–Гаусса для чотиривимірного простору

$$\int_\Omega \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\nu}d\Omega = \int_{S_\Omega} B_\nu dS_\nu.$$

Застосуємо її до другого інтеграла

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(F_{\mu\nu}\delta A_\mu\right)d\Omega = \int_{S_\Omega}\left(F_{\mu\nu}\delta A_\mu\right)dS_\nu$$

і повернемося до варіаційної задачі

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{c}j_\mu\delta A_\mu - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\delta A_\mu\right)d\Omega + \frac{1}{4\pi}\int_{S_\Omega} F_{\mu\nu}\delta A_\mu dS_\nu = 0.$$

Остання рівність повинна бути справедливою для будь-якого об'єму. Спрямуємо $\Omega \to \infty$, тоді $S_\Omega \to \infty$. $F_{\mu\nu}$ визначається через компоненти векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ згідно з (5.7). Межами інтегрування за координатами є нескінченність, де поле прагне до нуля. На межах інтегрування за часом у початковий і кінцевий моменти часу варіація потенціалів дорівнює нулю, тому що за змістом ПНД потенціали в початковий і кінцевий моменти часу задані. Таким чином, $F_{\mu\nu}\delta A_\mu \Big|_{S_\Omega\to\infty} \to 0$.

Сформулюємо *умову випромінювання електромагнітного поля.* Будемо вимагати спадання на нескінченності тензора електромагнітного поля

$$\lim_{r\to\infty} F_{\mu\nu} = 0 \text{ як } \frac{1}{r^{\alpha+1}} \quad (\alpha > 0).$$

Таким чином, інтеграл за гіперповерхнею S_Ω при $S_\Omega \to \infty$ прагне до нуля. Варіаційна задача набуває вигляду

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{c} j_\mu - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\right)\delta A_\mu d\Omega = 0.$$

За змістом ПНД варіація потенціалу поля δA_μ у цьому інтегралі довільна, отже, нулю повинен дорівнювати коефіцієнт при δA_μ. Одержуємо таке *коваріантне рівняння, наслідком якого є друга пара рівнянь Максвелла*:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu, \tag{13.5}$$

$\mu = 1,2,3,4$, за ν відбувається підсумовування.

Розглянемо рівняння (13.5) з урахуванням явного вигляду тензора електромагнітного поля (5.7)

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

і 4-вектора густини струму (10.8)

$$j_\mu = (\vec{j}, ic\rho) = (j_x, j_y, j_z, ic\rho).$$

Скористаємось також явним виглядом виразу для $\operatorname{rot}\vec{H}$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{x}_0\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \vec{y}_0\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) + \vec{z}_0\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right).$$

Розглянемо $\mu = 1$.

$$\frac{\partial F_{1\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_1;$$

$$\frac{\partial F_{1\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

Із урахуванням явного виразу для $\operatorname{rot}\vec{H}$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{H}\right)_x = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_x.$$

Аналогічно $\mu = 2$ дає

$$\left(\operatorname{rot}\vec{H}\right)_y = \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_y;$$

при $\mu = 3$ маємо

$$\left(\operatorname{rot}\vec{H}\right)_z = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_z.$$

Домноживши кожне з цих рівнянь на відповідний орт і склавши, отримуємо таке рівняння:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}\,.$$

Нехай $\mu = 4$.

$$\frac{\partial F_{4\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_4;$$

$$\frac{\partial F_{4\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{44}}{\partial x_4} =$$

$$= i\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = i \operatorname{div}\vec{E}.$$

Візьмемо до уваги, що $j_4 = ic\rho$, тоді одержимо рівняння

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho\,.$$

Таким чином, маємо *другу пару рівнянь Максвелла в диференціальній формі*

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j};\\ &\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho. \end{aligned} \qquad (13.6)$$

Дві пари рівнянь Максвелла (3.3), (13.6) повністю визначають електромагнітне поле і є основними рівняннями електродинаміки.

Отримаємо другу пару рівнянь Максвелла в інтегральній формі. Введемо до розгляду довільний об'єм V, який обмежено поверхнею S, а також одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні $\vec{n}$. Проінтегруємо друге з рівнянь (13.6) за об'ємом

$$\int_V \operatorname{div}\vec{E}\, dV = 4\pi \int_V \rho\, dV\,.$$

Згідно з (10.1)

$$Q = \int_V \rho dV\,,$$

де Q – повний заряд об'єму V. Застосуємо теорему Остроградського–Гаусса (А.37)

$$\int_V \operatorname{div}\vec{E}\, dV = \oint_S \vec{E}\, d\vec{S},$$

$d\vec{S} = \vec{n} dS$. Тоді інтегральна форма другого рівняння (13.6) матиме вигляд

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q\,. \qquad (13.7)$$

Потік електричного поля через замкнену поверхню дорівнює помноженому на 4π повному заряду, що знаходиться в об'ємі, обмеженому цією поверхнею. Інтегральне формулювання (13.7) другого з рівнянь (13.6) відповідає відомому експериментальному *закону Кулона*.

Розглянемо перше рівняння (13.6). Проінтегруємо його за деякою поверхнею S.

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{H} d\vec{S} = \frac{4\pi}{c}\int_S \left\{\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\} d\vec{S}\,.$$

Застосуємо до лівої частини теорему Стокса

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{H} d\vec{S} = \oint_L \vec{H} d\vec{l}\,,$$

де $d\vec{l} = dl\vec{\tau}$, $\vec{\tau}$ – одиничний вектор дотичної до контуру.

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \left\{\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\} d\vec{S}\,. \tag{13.8}$$

За місцем у рівнянні величина $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ має зміст густини струму. Ця величина отримала назву *густини струму зміщення*. Інтегральне формулювання (13.8) першого рівняння (13.6) відповідає відомому експериментальному *закону Ампера*: циркуляція магнітного поля по деякому контуру дорівнює помноженій на $\frac{4\pi}{c}$ сумі струмів дійсного і зміщення, що протікають через поверхню, яка спирається на цей контур.

Перша пара рівнянь Максвелла (3.3) в релятивістсько-коваріантній формі має вигляд

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = 0\,. \tag{13.9}$$

Тут індекси μ, ν, σ незалежно змінюються від одиниці до чотирьох. Величина $\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}$ є тензором третього рангу. Можна показати, що цей тензор антисиметричний за всіма індексами, і відмінними від нуля у нього будуть тільки ті компоненти, в яких значення всіх трьох індексів різні. Це дає чотири скалярні рівняння, що відповідають першій парі рівнянь Максвелла – векторному

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

яке можна представити у вигляді трьох скалярних рівнянь, і скалярному

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0\,.$$

§ 14. Самоузгоджена система рівнянь мікроскопічної електродинаміки (теорії поля)

1. Яка аксіоматика лежить в основі теорії поля?
2. Як сформулювати самоузгоджену систему рівнянь мікроскопічної електродинаміки, проаналізувати її фізичний зміст?

В основі теорії поля лежить така аксіоматика.

1) Існування двох рівноправних форм матерії: частинок і електромагнітного поля.

2) Простір і час єдині й утворюють просторово-часовий континуум (ПЧК), процеси в якому підпорядковуються законам спеціальної теорії відносності Ейнштейна.

3) Постулат сили Лоренца

$$\vec{F}_L = e\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{e}{c}\left[\vec{v}, \vec{H}(\vec{r},t)\right].$$

Фізична система, що складається з електромагнітного поля і зарядів, які в ньому знаходяться, характеризується функціоналом дії (12.10)

$$S(A_\mu, x_\mu) = S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu),$$

який в явному вигляді записується згідно з (12.11)

$$S = \sum_{(i)}\left(-m_{0_i}c\int_{a_i}^{b_i}\sqrt{-dx_{\mu_i}^2}\right) + \sum_{(i)}\frac{e_i}{c}\int_{a_i}^{b_i}A_{\mu_i}dx_{\mu_i} + \frac{i}{16\pi c}\int_\Omega F_{\mu\nu}^2 d\Omega\,,$$

де $d\Omega = dxdydzd\tau$.

Перехід фізичної системи з одного стану до іншого здійснюється відповідно до *принципу найменшої дії* (ПНД) таким чином, щоб функціонал дії був мінімальним, початкове і кінцеве положення при цьому вважаються фіксованими:

$$\delta S = 0;$$

$$\delta x_\mu \Big|_{a_i} = 0;$$

$$\delta x_\mu \Big|_{b_i} = 0.$$

Застосовуючи ПНД до функціоналу дії фізичної системи, що складається з електромагнітного поля і зарядів, які в ньому знаходяться, отримаємо

$$\delta S(A_\mu, x_\mu) = \delta\left\{S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu)\right\}\Big|_{A_\mu=\text{const}} +$$

$$+\delta\left\{S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu)\right\}\Big|_{x_\mu=\text{const}} = 0.$$

Візьмемо до уваги, що варіація $S_f(A_\mu)$ при постійному полі ($A_\mu = \text{const}$) дорівнює нулю, також дорівнює нулю варіація $S_m(x_\mu)$ на заданій траєкторії ($x_\mu = \text{const}$). Тоді варіаційна задача набуває вигляду

$$\delta S(A_\mu, x_\mu) = \delta\left\{S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu)\right\}\Big|_{A_\mu=\text{const}} +$$

$$+\delta\left\{S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu)\right\}\Big|_{x_\mu=\text{const}} = 0.$$

Будемо розглядати дві варіаційні задачі окремо:

$$\delta\left\{S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu)\right\}\Big|_{A_\mu=\text{const}} = 0; \qquad (14.1)$$

$$\delta\left\{S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu)\right\}\Big|_{x_\mu=\text{const}} = 0. \qquad (14.2)$$

Перша варіаційна задача описує процеси, які відбуваються з зарядженою частинкою в заданому електромагнітному полі. Її розв'язання дає рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі і першу пару рівнянь Максвелла.

Друга варіаційна задача описує процеси, що відбуваються з електромагнітним полем при русі в ньому заряджених частинок. Траєкторії руху частинок вважаються заданими. Рішення другої варіаційної задачі дає другу пару рівнянь Максвелла.

Таким чином, електромагнітне поле і заряджені частинки, що в ньому рухаються, взаємодіють одне з одним: електромагнітне поле змінюється при русі зарядів, і рух зарядів змінюється під впливом електромагнітного поля. Маємо так звану *самоузгоджену задачу,* що являє собою сумісний розгляд двох варіаційних задач

$$\begin{cases} \delta\left\{S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu)\right\}\Big|_{A_\mu=\text{const}} = 0; \\ \delta\left\{S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu)\right\}\Big|_{x_\mu=\text{const}} = 0. \end{cases} \qquad (14.3)$$

Сумісне розв'язання двох варіаційних задач називається *самоузгодженим рішенням*.

Сформулюємо *самоузгоджену задачу мікроскопічної електродинаміки.* До самоузгодженої задачі мікроскопічної електродинаміки входять дві пари рівнянь Максвелла, визначення для густини заряду і густини струму, рівняння руху для кожної зарядженої частинки, що входить в систему, доповнені початковими значеннями радіусів-векторів і швидкостей, які необхідні для визначення густин заряду і струму. Крім того, для напруженостей електричного і магнітного полів повинна виконуватися умова випромінювання.

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ \operatorname{div}\vec{H} = 0; \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}; \\ \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho; \\ \rho = \sum\limits_{(i)} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)); \\ \vec{j} = \sum\limits_{(i)} e_i \vec{v}_i(t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)); \quad \vec{v}_i(t) = \frac{d\vec{r}_i}{dt}; \\ \frac{d}{dt}\frac{m_{0_i}\vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2 / c^2}} = e_i\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{e_i}{c}[\vec{v}_i, \vec{H}(\vec{r},t)]; \\ \vec{r}_i(t_0) = \vec{r}_{0_i}; \quad \vec{v}_i(t_0) = \vec{v}_{0_i}; \\ \lim\limits_{r\to\infty}\left|\vec{E}\right|, \left|\vec{H}\right| = 0. \end{cases} \tag{14.4}$$

Тут $\vec{r}_i$, $\vec{v}_i$ – радіус-вектор і швидкість *i*-ї зарядженої частинки, m_{0_i}, e_i – її маса і заряд, $\vec{r}$ – радіус-вектор точки спостереження.

§ 15. Закон збереження енергії в мікроскопічній електродинаміці

1. Як визначити змінення за одиницю часу кінетичної енергії заряджених частинок, що знаходяться в електромагнітному полі?
2. Отримати закон збереження енергії в мікроскопічній електродинаміці в інтегральній формі. Які енергетичні величини вводяться для характеристики електромагнітного поля?
3. Дати визначення вектора Умова–Пойнтинга. В чому полягає його фізичний зміст?
4. Сформулювати закон збереження енергії в мікроскопічній електродинаміці в диференціальній формі.

Рівняння руху *однієї* зарядженої частинки в електромагнітному полі у релятивістсько-коваріантній формі має вигляд (5.4)

$$m_0 c\frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c}F_{\mu\nu}u_\nu,$$

де $\mu = 1, 2, 3, 4$, $u_\nu = \frac{dx_\nu}{ds}$ – чотиривимірний вектор швидкості. З урахуванням того, що $x_1 \to x; x_2 \to y; x_3 \to z; x_4 \to ict$ і $ds = cdt\sqrt{1 - v^2 / c^2}$, ці компоненти мають значення (5.9)

$$u_1 = \frac{v_x}{c\sqrt{1 - v^2 / c^2}}; \quad u_2 = \frac{v_y}{c\sqrt{1 - v^2 / c^2}};$$

$$u_3 = \frac{v_z}{c\sqrt{1 - v^2 / c^2}}; \quad u_4 = \frac{i}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

$F_{\mu\nu}$ – тензор електромагнітного поля (5.3):

$$F_{\mu\nu} = -\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}.$$

Нагадаємо, що при $\mu = 1, 2, 3$ отримуємо тривимірне рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі (2.18)

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}].$$

Значення $\mu = 4$ дає такий результат:

$$m_0 c\frac{du_4}{ds} = \frac{e}{c}F_{4\nu}u_\nu = \frac{e}{c}\left(F_{41}u_1 + F_{42}u_2 + F_{43}u_3 + F_{44}u_4\right).$$

Після підстановки компонент 4-вектора швидкості (5.9) і відповідних значень компонент тензора електромагнітного поля (5.7) одержимо

$$\frac{d\left(\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)}{dt} = e\left(v_xE_x + v_yE_y + v_zE_z\right).$$

Диференційована величина ліворуч є кінетична енергія. Таким чином, при $\mu = 4$ маємо отриману нами раніше формулу змінення кінетичної енергії (2.22)

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \vec{v}\cdot e\vec{E} = \vec{v}\cdot\vec{F}_K,$$

згідно з якою змінення кінетичної енергії зарядженої частинки дорівнює скалярному добутку сили Кулона і вектора швидкості.

Це співвідношення було одержано для однієї частинки. Розглянемо тепер об'єм V, який містить систему заряджених частинок, що знаходяться в електромагнітному полі. Тоді змінення кінетичної енергії *i*-ї частинки визначається так:

$$\frac{d\mathcal{E}_{k_i}}{dt} = \vec{v}_i\cdot e_i\vec{E}(\vec{r}_i, t), \tag{15.1}$$

де $\vec{r}_i$, $\vec{v}_i$ – радіус-вектор і швидкість *i*-ї зарядженої частинки.

Кінетична енергія системи частинок дорівнює сумі кінетичних енергій усіх частинок системи, тобто $\mathcal{E}_k = \sum_{(i)}\mathcal{E}_{k_i}$. Отже, змінення кінетичної енергії системи частинок

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{(i)}\mathcal{E}_{k_i} = \sum_{(i)}\frac{d\mathcal{E}_{k_i}}{dt} = \sum_{(i)}e_i\vec{v}_i\cdot\vec{E}(\vec{r}_i, t). \tag{15.2}$$

Скористаємось визначенням для густини струму (10.9)

$$\vec{j} = \sum_{(i)}e_i\vec{v}_i\delta(\vec{r} - \vec{r}_i),$$

а також властивістю δ-функції (С.12) з урахуванням того, що всі $\vec{r}_i \in V$ (V – об'єм, який містить систему заряджених частинок)

$$\vec{E}(\vec{r}_i, t) = \int_V \vec{E}(\vec{r}, t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)dV. \tag{15.3}$$

Тоді

$$\sum_{(i)}e_i\vec{v}_i\cdot\vec{E}(\vec{r}_i, t) = \sum_{(i)}e_i\vec{v}_i(t)\int_V \vec{E}(\vec{r}, t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)dV =$$
$$= \int_V \sum_{(i)}e_i\vec{v}_i(t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)\vec{E}(\vec{r}, t)dV = \int_V \vec{j}\vec{E}(\vec{r}, t)dV.$$

Таким чином,

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \int_V \vec{j}\vec{E}dV. \tag{15.4}$$

Визначимо $\vec{j}$ з рівняння Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

і підставимо до (15.4)

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \int_V \left\{ \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} \vec{E} dV =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_V \vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV + \frac{c}{4\pi}\int_V \vec{E}\operatorname{rot}\vec{H} dV.$$

Візьмемо до уваги, що

$$\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\cdot\vec{E}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial \left|\vec{E}\right|^2}{\partial t}, \tag{15.5}$$

крім того, виконується векторна тотожність

$$\operatorname{div}\left[\vec{E},\vec{H}\right] = \vec{H}\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\operatorname{rot}\vec{H} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}\operatorname{rot}\vec{H} = -\operatorname{div}\left[\vec{E},\vec{H}\right] + \vec{H}\operatorname{rot}\vec{E}.$$

Отримаємо

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = -\frac{1}{8\pi}\int_V dV \frac{\partial \left|\vec{E}\right|^2}{\partial t} + \frac{c}{4\pi}\int_V dV \vec{H}\operatorname{rot}\vec{E} - \frac{c}{4\pi}\int_V dV \operatorname{div}\left[\vec{E},\vec{H}\right].$$

Скористаємось рівнянням Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{H}\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\vec{H}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{2c}\frac{\partial \left|\vec{H}\right|^2}{\partial t}$$

і підставимо до $\frac{d\mathcal{E}_k}{dt}$. Зміна кінетичної енергії системи заряджених частинок в електромагнітному полі визначається так:

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = -\frac{1}{8\pi}\int_V dV \frac{\partial \left|\vec{E}\right|^2}{\partial t} - \frac{1}{8\pi}\int_V dV \frac{\partial \left|\vec{H}\right|^2}{\partial t} - \frac{c}{4\pi}\int_V dV \operatorname{div}\left[\vec{E},\vec{H}\right];$$

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{8\pi}\left|\vec{E}\right|^2 dV - \frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{8\pi}\left|\vec{H}\right|^2 dV - $$
$$-\int_V \operatorname{div}\left\{\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right\} dV. \tag{15.6}$$

Введемо позначення:

$$w_E = \frac{1}{8\pi}\left|\vec{E}\right|^2; \quad w_H = \frac{1}{8\pi}\left|\vec{H}\right|^2; \quad w = w_E + w_H; \tag{15.7}$$

$$\vec{P} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]. \tag{15.8}$$

Тоді

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V (w_E + w_H) dV - \int_V \operatorname{div}\vec{P} dV. \tag{15.9}$$

За місцем положення введених величин у (15.9) видно, що w_E, w_H мають зміст густини енергії. w_E – густина енергії електричного поля, w_H – густина енергії магнітного поля, тоді w – густина енергії електромагнітного поля. $\vec{P}$ – вектор Умова–Пойнтинга.

Позначимо

$$W = \int_V (w_E + w_H) dV. \tag{15.10}$$

W – енергія електромагнітного поля, що міститься в об'ємі V. Скористаємось теоремою Остроградського–Гаусса

$$\int_V \operatorname{div}\vec{P} dV = \oint_S \vec{P} d\vec{S} = \oint_S \vec{P}\cdot\vec{n}\, dS,$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор *зовнішньої* нормалі. Величина $\oint_S \vec{P}d\vec{S}$ – це потік вектора Умова–Пойнтинга. Вона є додатною, коли вектори $\vec{P}$ та $\vec{n}$ утворюють гострий кут, тобто цей потік направлений з об'єму V до зовнішньої області.

Одержуємо *закон збереження енергії в інтегральній формі – теорему Умова–Пойнтинга*:

$$-\frac{d}{dt}(W+\mathcal{E}_k)=\oint_S \vec{P}d\vec{S}. \tag{15.11}$$

Тут S – замкнена поверхня, що обмежує об'єм V, $(W+\mathcal{E}_k)$ – повна енергія в об'ємі. Знак «$-$» свідчить про зменшення енергії в об'ємі. Таким чином, можна сформулювати закон збереження енергії мікроскопічної електродинаміки так: зменшення енергії в об'ємі V відбувається за рахунок її випромінювання в зовнішню область.

Із формулювання (15.11) становиться очевидним *фізичний зміст вектора* $\vec{P}$. Оскільки $\frac{d}{dt}(W+\mathcal{E}_k)$ – це потужність, то вектор Умова–Пойнтинга представляє собою густину потоку потужності електромагнітного поля, який протікає через поверхню S, тобто кількість енергії поля, що протікає через одиничну поверхню за одиницю часу.

Переформулюємо вираз (15.11)

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt}=-\frac{dW}{dt}-\oint_S \vec{P}d\vec{S}. \tag{15.12}$$

Для такої форми запису формулювання теореми Умова–Пойнтинга звучить так: приріст кінетичної енергії частинок в об'ємі відбувається за рахунок зменшення енергії електромагнітного поля всередині V і притока енергії ззовні об'єму.

Можливе і таке формулювання:

$$-\frac{d\mathcal{E}_k}{dt}=\frac{dW}{dt}+\oint_S \vec{P}d\vec{S} \tag{15.13}$$

– зменшення кінетичної енергії заряджених частинок в об'ємі V витрачається на збільшення енергії електромагнітного поля в об'ємі та енергію випромінювання поля за межі V.

Одержимо закон збереження енергії в диференціальній формі. Для цього врахуємо, що

$$\frac{d}{dt}W=\frac{d}{dt}\int_V (w_E+w_H)dV=\frac{d}{dt}\int_V wdV. \tag{15.14}$$

Підставимо (15.4) і (15.14) до (15.9)

$$\int_V \vec{j}\vec{E}dV=-\frac{d}{dt}\int_V wdV-\int_V \operatorname{div}\vec{P}dV.$$

Цей вираз можна переписати так:

$$\int_V (\vec{j}\vec{E}+\frac{\partial w}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{P})dV=0.$$

Оскільки рівність повинна виконуватись для довільного об'єму V, то нулю дорівнює підінтегральний вираз. Звідси одержуємо *диференціальну форму закону збереження енергії мікроскопічної електродинаміки (теорему Умова–Пойнтинга)*

$$\operatorname{div}\vec{P}+\vec{j}\vec{E}+\frac{\partial w}{\partial t}=0. \tag{15.15}$$

§ 16. Електростатика

1. Сформулювати фізичну постановку задачі мікроскопічної електродинаміки в загальному вигляді.
2. Як формулюється фізична постановка задачі мікроскопічної електродинаміки в окремому випадку електростатики?
3. Якого вигляду набуває система рівнянь мікроскопічної електродинаміки у випадку електростатики? У чому полягає фізичний зміст цього наближення?
4. Отримати рівняння Пуассона (Лапласа) для електростатичного потенціалу.
5. У чому полягає ідея методу функції Гріна? Як реалізується метод функції Гріна у випадку електростатики?
6. Знайти наближений вираз для електростатичного потенціалу у випадку віддаленої точки спостереження. У чому полягає мультипольне розкладання для потенціалу у випадку електростатики? Яка область його застосовності?

Сформулюємо фізичну постановку задачі мікроскопічної електродинаміки в загальному вигляді: в обмеженому об'ємі V рухаються заряджені частинки з масами m_{0i} і зарядами e_i, що характеризуються в будь-який момент часу радіусами-векторами $\vec{r}_i(t)$. Необхідно знайти електромагнітне поле в точці спостереження з радіусом-вектором $\vec{r}$ в момент часу t. Задача електродинаміки в загальній постановці описується вихідними рівняннями мікроскопічної електродинаміки (14.4)

$$\begin{cases}
\operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}; \\
\operatorname{div}\vec{H} = 0; \\
\operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}; \\
\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho; \\
\rho = \sum\limits_{(i)} e_i\delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)); \\
\vec{j} = \sum\limits_{(i)} e_i\vec{v}_i(t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)); \quad \vec{v}_i(t) = \dfrac{d\vec{r}_i}{dt}; \\
\dfrac{d}{dt}\dfrac{m_{0_i}\vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = e_i\vec{E}(\vec{r},t) + \dfrac{e_i}{c}[\vec{v}_i, \vec{H}(\vec{r},t)]; \\
\vec{r}_i(t_0) = \vec{r}_{0_i}; \quad \vec{v}_i(t_0) = \vec{v}_{0_i}; \\
\lim\limits_{r\to\infty} \left|\vec{E}\right|, \left|\vec{H}\right| = 0.
\end{cases}$$

Окремим випадком загальної задачі електродинаміки є електростатика. Фізична постановка задачі електростатики формулюється так: необхідно знайти електромагнітне поле за умов, що:

1) усі заряджені частинки знаходяться у стані спокою, тобто всі їх радіуси-вектори $\vec{r}_i$ не залежать від часу, є постійними, а всі їх швидкості дорівнюють нулю $\vec{v}_i = \dfrac{d\vec{r}_i}{dt} = 0$;

2) положення всіх зарядів задані, тобто всі $\vec{r}_i$ відомі.

Задача спрощується порівняно з загальним формулюванням, тому що положення і швидкості всіх заряджених частинок відомі, отже, відсутня необхідність інтегрування рівнянь руху. Можемо визначити густину заряду

$$\rho = \sum_{(i)} e_i\delta(\vec{r} - \vec{r}_i),$$

а густина струму дорівнює нулю

$$\vec{j} = \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \equiv 0 \quad (\vec{v}_i(t) = 0).$$

Крім того, оскільки всі частинки покояться, то всі похідні за часом дорівнюють нулю $(\frac{\partial}{\partial t} = 0)$.

У випадку електростатики рівняння Максвелла розділяються на дві незалежні системи рівнянь відносно електричного і магнітного полів:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = 0; \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0. \end{cases} \tag{16.1}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = 0; \\ \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho. \end{cases} \tag{16.2}$$

Рішенням системи (16.1) є постійний вектор. У силу умови випромінювання $\lim\limits_{r \to \infty} \left| \vec{H} \right| = 0$, магнітне поле на нескінченності повинно дорівнювати нулю. Отже, магнітне поле повинно дорівнювати нулю в будь-якій точці простору, тобто $\vec{H} \equiv 0$.

Знайдемо рішення системи (16.2). Для цього скористаємось виразом для напруженості електричного поля $\vec{E}$ через потенціали (2.19) з урахуванням того, що $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{16.3}$$

Тут φ – скалярний потенціал.

Одержимо рівняння для скалярного потенціалу. Для цього підставимо вираз (16.3) до системи (16.2). Підстановка до першого рівняння системи внаслідок відомої векторної тотожності (А.24) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$ перетворює рівняння на тотожність. Підставивши вираз

(16.3) до другого рівняння системи і скориставшись векторною тотожністю (А.23) $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta\varphi$, отримуємо рівняння Пуассона для скалярного потенціалу

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{16.4}$$

У випадку $\rho = 0$ рівняння Пуассона переходить у рівняння Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \tag{16.5}$$

Розв’язавши рівняння Пуассона, знайдемо скалярний потенціал, потім за допомогою (16.3) – напруженість електричного поля.

Для рішення рівняння Пуассона скористаємось методом функції Гріна. Ми передбачаємо, що всі радіуси-вектори в деякому замкненому об’ємі задані, тобто всі $\vec{r}_i$ відомі. Крім радіуса-вектора точки спостереження

$$\vec{r} = \vec{x}_0 x + \vec{y}_0 y + \vec{z}_0 z,$$

введемо допоміжний вектор

$$\vec{r}' = \vec{x}_0 x' + \vec{y}_0 y' + \vec{z}_0 z', \ \vec{r}' \in V$$

і елемент об’єму $dV' = dx'dy'dz'$.

Скориставшись властивостями тривимірної дельта-функції (С.12)

$$\int_V f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{a}) dV = \begin{cases} f(\vec{a}), & \vec{a} \in V; \\ 0, & \vec{a} \notin V \end{cases}$$

і (С.14)

$$\delta(\vec{r}) = \delta(-\vec{r}),$$

запишемо густину заряду у вигляді інтеграла за об’ємом

$$\rho(\vec{r}) = \int_V dV' \rho(\vec{r}')\delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{16.6}$$

і підставимо до рівняння Пуассона

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -4\pi\int\limits_V dV'\rho(\vec{r}')\delta(\vec{r}-\vec{r}'). \qquad (16.7)$$

Рішення цього рівняння будемо шукати у вигляді

$$\varphi(\vec{r}) = \int\limits_V dV'\rho(\vec{r}')g(\vec{r},\vec{r}'), \qquad (16.8)$$

де $\rho(\vec{r}')$ є ваговою функцією, а $g(\vec{r},\vec{r}')$ – шукана функція. Підставимо це представлення до рівняння Пуассона (16.7). При цьому врахуємо, що оператор Лапласа містить похідні за нештрихованими координатами.

Поміняємо порядок інтегрування і диференціювання

$$\int\limits_V dV'\rho(\vec{r}')\Delta g(\vec{r},\vec{r}') = -4\pi\int\limits_V dV'\rho(\vec{r}')\delta(\vec{r}-\vec{r}').$$

Перепишемо цей вираз так:

$$\int\limits_V dV'\rho(\vec{r}')\left[\Delta g(\vec{r},\vec{r}') + 4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')\right] = 0.$$

Через те, що інтегрування відбувається за довільним об'ємом, рівність нулю інтеграла означає рівність нулю підінтегрального виразу. Тому маємо

$$\Delta g(\vec{r},\vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}'). \qquad (16.9)$$

Порівнюючи (16.9) і (16.4) з урахуванням (10.3), робимо висновок про те, що це рівняння є рівнянням Пуассона для одиничного точкового заряду, а рішенням його є *функція Гріна* $g(\vec{r},\vec{r}')$ – функція, яка має зміст *потенціалу одиничного точкового джерела*.

Вигляд рівняння для функції Гріна не залежить від розподілу заряду в об'ємі. Таким чином, якщо відоме рішення рівняння для функції Гріна, то співвідношення (16.8) дозволяє знайти потенціал, який утворюється будь-яким заданим розподілом заряду.

Рішення рівняння (16.9) відоме з математики:

$$g(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}. \qquad (16.10)$$

Тоді потенціал визначається співвідношенням (16.8)

$$\varphi(\vec{r}) = \int\limits_V dV'\frac{\rho(\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}. \qquad (16.11)$$

Знаючи потенціал, визначимо напруженість електричного поля за допомогою формули (16.3). Врахуємо при цьому, що градієнт береться за нештрихованими координатами

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\nabla\int\limits_V dV'\frac{\rho(\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} = -\int\limits_V dV'\rho(\vec{r}')\nabla\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}.$$

У явному вигляді градієнт, згідно з (А.34), дорівнює

$$\nabla\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}.$$

Тоді остаточний вираз для напруженості електричного поля матиме вигляд

$$\vec{E} = \int\limits_V dV'\rho(\vec{r}')\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}. \qquad (16.12)$$

Знайдемо наближений вираз для електростатичного потенціалу у випадку, коли точка спостереження віддалена від об'єму V, в якому зосереджені заряди, ($\vec{r}_i \in V,\ i=1,2,3...$), на значну відстань, тобто $\left|\vec{r}\right| \gg \left|\vec{r}'\right|$.

$$\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}=\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}},$$

при цьому $x \gg x', y \gg y', z \gg z'$. Розкладемо цей вираз у ряд Тейлора за малим параметром $\vec{r}'$, обмеживши розкладання двома доданками:

$$\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}=\frac{1}{\left|\vec{r}\right|}-\vec{r}'\nabla\frac{1}{\left|\vec{r}\right|}+\ldots\ .$$

Підставивши отриманий вираз до (16.11), представимо його у вигляді двох інтегралів

$$\varphi(\vec{r})=\int\limits_V dV'\frac{\rho(\vec{r}')}{\left|\vec{r}\right|}-\int\limits_V dV'\rho(\vec{r}')\vec{r}'\nabla\frac{1}{\left|\vec{r}\right|}.$$

Інтегрування відбувається за штрихованими координатами, а $\vec{r}$ і $\nabla\frac{1}{\left|\vec{r}\right|}$ залежать від нештрихованих координат, отже, ці величини можна винести за знак інтеграла

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{\left|\vec{r}\right|}\int\limits_V dV'\rho(\vec{r}')-\nabla\frac{1}{\left|\vec{r}\right|}\int\limits_V dV'\rho(\vec{r}')\vec{r}'\ .$$

Розглянемо перший інтеграл, скориставшись визначенням густини заряду (10.3)

$$\rho(\vec{r}')=\sum_{(i)}e_i\delta(\vec{r}'-\vec{r}_i)$$

і властивістю дельта-функції (С.11),

$$\frac{1}{\left|\vec{r}\right|}\int\limits_V dV'\rho(\vec{r}')=\frac{1}{\left|\vec{r}\right|}\int\limits_V dV'\sum_{(i)}e_i\delta(\vec{r}'-\vec{r}_i)=$$

$$=\frac{1}{\left|\vec{r}\right|}\sum_{(i)}e_i\int\limits_V dV'\delta(\vec{r}'-\vec{r}_i)=\frac{1}{\left|\vec{r}\right|}\sum_{(i)}e_i=\frac{Q}{\left|\vec{r}\right|},$$

де Q – повний заряд об'єму V.

Другий інтеграл з урахуванням (С.12)

$$\nabla\frac{1}{\left|\vec{r}\right|}\int\limits_V dV'\rho(\vec{r}')\vec{r}'=\nabla\frac{1}{\left|\vec{r}\right|}\int\limits_V dV'\vec{r}'\sum_{(i)}e_i\delta(\vec{r}'-\vec{r}_i)=$$

$$=\nabla\frac{1}{\left|\vec{r}\right|}\sum_{(i)}e_i\int\limits_V dV'\vec{r}'\delta(\vec{r}'-\vec{r}_i)=\nabla\frac{1}{\left|\vec{r}\right|}\sum_{(i)}e_i\vec{r}_i=\vec{p}\,\nabla\frac{1}{\left|\vec{r}\right|}.$$

Тут $\vec{p}=\sum_{(i)}e_i\vec{r}_i$ – дипольний момент системи зарядів.

Таким чином, для випадку, коли точка спостереження віддалена від об'єму V на значну відстань ($\left|\vec{r}\right|\gg\left|\vec{r}'\right|$), отримуємо наближений вираз для електростатичного потенціалу

$$\varphi(\vec{r})=\frac{Q}{\left|\vec{r}\right|}-\vec{p}\,\nabla\frac{1}{\left|\vec{r}\right|}+\ldots\ . \tag{16.13}$$

Це так зване мультипольне розкладання. У розглянутому випадку ми обмежились дипольним розкладанням, наступні доданки, що виникають при утриманні в розкладанні в ряд Тейлора більшої кількості членів, є моментами більш високих порядків.

§ 17. Магнітостатика

1. Сформулювати фізичну постановку задачі мікроскопічної електродинаміки в окремому випадку магнітостатики.
2. Як виглядає система рівнянь мікроскопічної електродинаміки у випадку магнітостатики? Сформулювати фізичний зміст цього наближення.
3. Отримати рівняння Пуассона для векторного потенціалу.
4. Як реалізується метод функції Гріна у випадку магнітостатики?
5. Як визначається векторний потенціал у віддаленій точці спостереження?

Другим окремим випадком загальної постановки задачі електродинаміки є магнітостатика. Розглянемо поля, які утворюються зарядами, що здійснюють стаціонарні (постійні) рухи, при своєму русі вони не приходять з нескінченності і не йдуть на нескінченність, а рухаються у скінченному об'ємі. Будемо вважати, що імпульси зарядів, які рухаються, залишаються весь час скінченними, отже, всі величини змінюються в скінченних межах, тому їх можна розглядати середніми у часі. Зокрема, середнє магнітне поле $\vec{H}$, яке утворюється зарядами, що рухаються, є функцією координат і не залежить від часу, тобто є стаціонарним. Таким чином, наближення магнітостатики полягає в такому:

1) положення і швидкості всіх зарядів задані, тобто всі $\vec{r}_i$ і $\vec{v}_i$ відомі;

2) оскільки всі процеси стаціонарні, то всі похідні за часом $\dfrac{\partial}{\partial t}=0$, крім $\vec{v}_i=\dfrac{d\vec{r}_i}{dt}\neq 0$, отже, і густина струму $\vec{j}\neq 0$.

Як і у випадку електростатики, задача спрощується порівняно із загальним формулюванням, тому що положення і швидкості всіх заряджених частинок відомі, і немає необхідності інтегрувати рівняння руху. Можемо визначити густину заряду і густину струму

$$\rho=\sum_{(i)} e_i\delta(\vec{r}-\vec{r}_i),\quad \vec{j}=\sum_{(i)} e_i\vec{v}_i\delta(\vec{r}-\vec{r}_i).$$

У випадку магнітостатики рівняння Максвелла розділяються на дві незалежні системи рівнянь відносно електричного і магнітного полів:

$$\begin{cases}\operatorname{rot}\vec{H}=\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r});\\ \operatorname{div}\vec{H}=0.\end{cases}\tag{17.1}$$

$$\begin{cases}\operatorname{rot}\vec{E}=0;\\ \operatorname{div}\vec{E}=4\pi\rho.\end{cases}\tag{17.2}$$

Знайдемо рішення системи (17.1). Для цього отримаємо рівняння для векторного потенціалу $\vec{A}$ з урахуванням виразу (2.19)

$$\vec{H}=\operatorname{rot}\vec{A},$$

а також умови калібровки Кулона (4.6)

$$\operatorname{div}\vec{A}=0.$$

Підставимо вирази для $\vec{H}$ через векторний потенціал до першого рівняння системи (17.1) і скористаємось відомою векторною тотожністю (A.26)

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}-\Delta\vec{A}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}.$$

Перший доданок цього виразу дорівнює нулю в силу умови калібровки Кулона. Отримуємо рівняння Пуассона для векторного потенціалу

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\,. \tag{17.3}$$

Для розв'язання цього рівняння також скористаємось методом функції Гріна. Запишемо густину струму у вигляді інтеграла за об'ємом

$$\vec{j}(\vec{r}) = \int\limits_V dV'\vec{j}(\vec{r}\,')\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,. \tag{17.4}$$

Векторний потенціал шукатимемо у вигляді

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_V dV'\vec{j}(\vec{r}\,')g(\vec{r},\vec{r}\,')\,, \tag{17.5}$$

де $\vec{j}(\vec{r}\,')$ – вагова функція, а $g(\vec{r},\vec{r}\,')$ – шукана функція Гріна. Підставимо представлення (17.4) і (17.5) до рівняння Пуассона (17.3)

$$\frac{1}{c}\Delta\int\limits_V dV'\vec{j}(\vec{r}\,')g(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{4\pi}{c}\int\limits_V dV'\vec{j}(\vec{r}\,')\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,.$$

Оператор Лапласа містить похідні за нештрихованими координатами. Змінимо порядок інтегрування і диференціювання

$$\int\limits_V dV'\vec{j}(\vec{r}\,')\Delta g(\vec{r},\vec{r}\,') = -4\pi\int\limits_V dV'\vec{j}(\vec{r}\,')\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,.$$

$$\int\limits_V dV'\vec{j}(\vec{r}\,')\left[\Delta g(\vec{r},\vec{r}\,') + 4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\right] = 0\,,$$

звідки маємо

$$\Delta g(\vec{r},\vec{r}\,') = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,.$$

Одержуємо рівняння для функції Гріна, таке саме, як у випадку електростатики (16.9). Його рішення (16.10) відоме

$$g(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\,.$$

Таким чином, векторний потенціал визначається співвідношенням

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_V dV'\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\,, \tag{17.6}$$

а напруженість магнітного поля

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{c}\mathrm{rot}\int\limits_V dV'\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\,.$$

Визначимо векторний потенціал, користуючись наближеним виразом для функції Гріна у випадку, коли заряди зосереджені в об'ємі V, а поле обчислюється у віддаленій точці ($\left|\vec{r}\right| \gg \left|\vec{r}\,'\right|$). Аналогічно попередньому скористаємось розкладанням у ряд Тейлора виразу

$$\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} = \frac{1}{\left|\vec{r}\right|} - \vec{r}\,'\nabla\frac{1}{\left|\vec{r}\right|} + \ldots\,,$$

градієнт в явному вигляді (А.34)

$$\nabla\frac{1}{\left|\vec{r}\right|} = -\frac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|^3}\,.$$

Тоді наближений вираз для функції Гріна

$$g(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{\left|\vec{r}\right|} + \vec{r}\,'\frac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|^3} + \ldots\,.$$

Підставимо його до виразу для векторного потенціалу

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_V dV'\vec{j}(\vec{r}')\left(\frac{1}{|\vec{r}|} + \vec{r}'\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{c|\vec{r}|}\int\limits_V dV'\vec{j}(\vec{r}') + \frac{\vec{r}}{c|\vec{r}|^3}\int\limits_V dV'\vec{j}(\vec{r}')\vec{r}'.$$

Скористаємось визначенням густини струму (10.9)

$$\vec{j}(\vec{r}') = \sum_{(i)} e_i\vec{v}_i\delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)$$

і властивостями дельта-функції (C.11), (C.12):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c|\vec{r}|}\int\limits_V dV'\sum_{(i)} e_i\vec{v}_i\delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) + \frac{\vec{r}}{c|\vec{r}|^3}\int\limits_V dV'\sum_{(i)} e_i\vec{v}_i\delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)\vec{r}' =$$

$$= \frac{1}{c|\vec{r}|}\sum_{(i)} e_i\vec{v}_i\int\limits_V dV'\delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) + \frac{\vec{r}}{c|\vec{r}|^3}\sum_{(i)} e_i\vec{v}_i\int\limits_V dV'\vec{r}'\delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) =$$

$$= \frac{1}{c|\vec{r}|}\sum_{(i)} e_i\vec{v}_i + \frac{1}{c|\vec{r}|^3}\sum_{(i)} e_i\vec{v}_i(\vec{r}\cdot\vec{r}').$$

Тоді наближене рішення задачі магнітостатики для векторного потенціалу в дипольному наближенні має вигляд

$$\vec{A} = \frac{1}{c|\vec{r}|}\sum_{(i)} e_i\vec{v}_i + \frac{1}{c|\vec{r}|^3}\sum_{(i)} e_i\vec{v}_i\left(\vec{r}\cdot\vec{r}_i\right), \qquad (17.7)$$

а для визначення напруженості магнітного поля, необхідно застосувати оператор rot до векторного потенціалу (17.7).

145. Сформулювати задачу про знаходження амплітудних характеристик відбитих і заломлених полів. Як вводяться коефіцієнти відбиття і заломлення? Отримати формули Френеля.

146. Виписати формули Френеля для окремого випадку нормального падіння хвилі.

147. Як відбивається плоска хвиля від поверхні металу?

148. Що таке ефект повного внутрішнього відбиття? Де він застосовується на практиці?

149. Дати визначення кута Брюстера.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Краткий курс теоретической физики. Кн. 1 : Механика. Электродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1969. – 271 с.
2. Ландау Л. Д. Теоретическая фізика : в 10 т. Т. 2 : Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – 512 с.
3. Ландау Л. Д. Теоретическая фізика : в 10 т. Т. 1 : Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 2002. – 224 с.
4. Ландау Л. Д. Теоретическая фізика : в 10 т. Т. 8 : Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1982. – 620 с.
5. Бредов М. М. Классическая электродинамика / М. М. Бредов, В. В. Румянцев, И. Н. Топтыгин. – М. : Наука, 1985. – 399 с.
6. Джексон Дж. Классическая электродинамика / Дж. Джексон. – М. : Мир, 1965. – 702 с.
7. Пановский В. Классическая электродинамика / В. Пановский, М. Филипс. – М. : Физматгиз, 1963. – 432 с.
8. Тамм И. Е. Основы теории электричества / И. Е. Тамм. – М. : Наука, 1989. – 504 с.
9. Баскаков С. И. Электродинамика и распространение радиоволн / С. И. Баскаков. – М. : Высш. шк., 1992. – 416 с.
10. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. – М. : Радио и связь, 1988. – 440 с.
11. Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн / В. В. Никольский, Т. И. Никольская. – М. : Наука, 1989. – 544 с.
12. Виноградова М. Б. Теория волн / М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков. – М. : Наука, 1990. – 432 с.
13. Батыгин В. В. Сборник задач по электродинамике / В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин – М. : Наука, 1970. – 503 с.
14. Теоретическая механика (для факультетов радиофизического профиля) : учебник для высших учебных заведений / С. Н. Шульга, О. В. Багацкая, А. Ю. Бутрым и др. – 2-е изд., испр. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2010. – 216 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК