МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. Н. КАРАЗИНА

Л. А. Власенко

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ С УРАВНЕНИЯМИ ТИПА СОБОЛЕВА

Учебное пособие

Харьков – 2011

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.в631.0я73
В58

Рецензенты:

ректор Харьковского национального университета радиоэлектроники, член-корреспондент НАН Украины, доктор технических наук, профессор **Бондаренко М.Ф.;**

заведующий кафедрой вычислительной математики Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук, профессор **Ляшко С.И.;**

профессор Национального технического университета Украины (КПИ), член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук, профессор **Чикрий А.А.**

Утверждено к печати решением Ученого совета
Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина
(протокол № 4 от 29.04.2011 г.)

Власенко Л. А.

В 58 Математические модели с уравнениями типа Соболева : учеб. пособ. / Л. А. Власенко. – Х. : ХНУ имени В.Н. Каразина, 2011. – 112 с.

Описываются математические модели, в которых возникают уравнения в частных производных, не разрешенные относительно старшей производной по времени, – уравнения, не принадлежащие типу Коши–Ковалевской. Изучаются классы моделей, выделяемые по общим математическим признакам. Также рассматриваются конечномерные аналоги – математические модели динамических систем с сосредоточенными параметрами, в которых используются обыкновенные дифференциальные уравнения и алгебраические соотношения, то есть дифференциально-алгебраические уравнения.

Рекомендуется для студентов и аспирантов естественных факультетов: механико-математического, физических, геолого-географического, экологического.

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.в631.0я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ………………………………………………………… 4
1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ С УРАВНЕНИЯМИ ТИПА СОБОЛЕВА…………………........ 8
1.1. Модель С. Л. Соболева…………………………………… 8
1.2. Волны Россби…………………………………………….... 11
1.3. Движение вязкой жидкости……………………………… 18
1.4. Волны изгиба в стержнях………………………………… 20
1.5. Внутренние гравитационные волны в океане……………... 21
1.6. Малые движения стратифицированной жидкости………... 26
1.7. Фильтрация жидкости в трещиновато-пористых породах... 29
1.8. Эволюция электромагнитного поля в волноводе с пространственно-дисперсной средой………………………… 35
1.9. Переходные процессы в электрических цепях с сосредоточенными параметрами………………………………… 38
1.10. Переходные режимы в электрических цепях с распределенными и сосредоточенными параметрами………….. 40
1.11. Вырожденное уравнение теплопроводности……………... 45
Упражнения…………………………………………………….. 46
2. АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С УРАВНЕНИЯМИ ТИПА СОБОЛЕВА……………………… 48
2.1. Краткий обзор методов для исследования моделей……… 48
2.2. Исследование математической модели фильтрации жидкости в трещиновато-пористых породах с распределенным внешним источником…………………………………………….. 53
2.3. Исследование математической модели эволюции электромагнитного поля в волноводе с пространственно-дисперсной средой……………………………………………... 69
2.4. Анализ переходных режимов электрических цепей с сосредоточенными и распределенными параметрами…………. 78
Упражнения…………………………………………………… 88
3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ…………………… 89
3.1. Пространства Соболева…………………………………… 89
3.2. Задача Дирихле……………………………………………. 93
3.3. Общие сведения о линейных неограниченных операторах. 96
Упражнения…………………………………………………… 99
Литература……………………………………………………… 101

ВВЕДЕНИЕ

Характерной чертой теории дифференциальных уравнений в частных производных является проникновение в эту теорию идей и методов функционального анализа. Особенно большое влияние оказала теория обобщенных функций, зарождение которой и первые ее применения относятся к работам С. Л. Соболева (1908–1989). Систематическому использованию теории обобщенных функций способствовали работы Л. Шварца (1915–2002).

Пусть $x = (x_1, ..., x_n)$ – точка пространства $\mathbf{R}^n$, а $(x, t) = (x_1, ..., x_n, t)$ – точка пространства $\mathbf{R}^n$ и времени t. Введем обозначение производной

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \cdots \alpha_n)$ – мультииндекс, т.е. набор целых неотрицательных чисел, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ – порядок производной D_x^α. Рассмотрим дифференциальный оператор в форме

$$L = \sum_{j=0}^{m} a_j(x, t; D_x) \frac{\partial^j}{\partial t^j}, \tag{1}$$

где $a_j(x, t; \xi)$ – полиномы по $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbf{R}^n$ с коэффициентами, зависящими от (x, t), т.е.

$$a_j(x, t; \xi) = \sum_{|\alpha| \le m_j} a_{\alpha, j}(x, t) \xi^\alpha, \;\; \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}.$$

В (1) символ D_x понимается как формальный вектор $D_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$. Теперь запишем дифференциальное уравнение в частных производных

$$Lu = f \tag{2}$$

или

$$\sum_{j=0}^{m} a_j(x, t; D_x) \frac{\partial^j}{\partial t^j} u(x, t) = f(x, t). \tag{3}$$

В общем случае уравнение (3) является не разрешенным относительно старшей производной по времени $\frac{\partial^m}{\partial t^m}$. Такие уравнения возникают при решении различных прикладных задач (см. ниже). В частном случае, когда оператор L имеет единичный коэффициент $a_m(x,t;\xi)=1$ при старшей производной по времени, т.е.

$$L=\frac{\partial^m}{\partial t^m}+\sum_{j=0}^{m-1}a_j(x,t;D_x)\frac{\partial^j}{\partial t^j},$$

уравнение (2) является разрешенным относительно старшей производной по времени:

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}u(x,t)+\sum_{j=0}^{m-1}a_j(x,t;D_x)\frac{\partial^j}{\partial t^j}u(x,t)=f(x,t). \tag{4}$$

К уравнениям (3), не разрешенным относительно старшей производной по времени, в отличие от уравнений (4), не применима теорема Коши–Ковалевской (например, [74, с. 254-258]). Уравнения вида (3) рассматривал С.Л. Соболев [94-98] и писал, что они не принадлежат типу Ковалевской. Эти уравнения С.А. Гальперн [44] назвал уравнениями типа С.Л. Соболева, а А.Г. Костюченко и Г.И. Эскин [60] назвали их уравнениями типа Соболева–Гальперна. Поэтому в литературе уравнение (3) называют или *уравнением не типа Ковалевской*, или *не типа Коши–Ковалевской*, или *типа Соболева*, или *типа Соболева–Гальперна*.

Уравнение в частных производных типа (3) встречается еще у Пуанкаре. В.И. Арнольд в [5] пишет: «Современное приписывание всех математических открытий имени последнего, от которого о них узнали (Америку никто не называет Колумбией), играет в научном обществе большую положительную социальную роль поощрения эпигонов. … В конце 1950-х годов Сергей Львович Соболев объяснил мне (засекреченные в течение многих лет) результаты о колебаниях жидкости во вращающихся сосудах (ракетах), ради которых он создал свою теорию «уравнения Соболева». Сегодня я знаю, что это «уравнение Соболева» было, однако, опубликовано Пуанкаре в 1910 году как метеорологическое описание гидродинамики или аэродинамики атмосферы на вращающейся планете. … Данное Соболевым обобщение теории Пуанкаре использовало новый, изобретенный им, класс функциональных пространств». Поэтому правильнее было бы называть «уравнение Пуанкаре–Соболева», но будем придерживаться укоренившейся терминологии – «уравнение Соболева».

Уравнение (3) и, в частности, уравнение (4) можно исследовать с помощью функционального метода, основанного на переходе к абстрактной форме этого уравнения (см. [63] и ссылки там, а также [70]). Абстрактной формой уравнения не типа Коши–Ковалевской является неявное дифференциально-операторное уравнение, не разрешенное относительно старшей производной

$$\sum_{j=0}^{m} A_j(t)\frac{d^j}{dt^j}u(t) = f(t), \tag{5}$$

где $A_j(t)$ – дифференциальные операторы, которые определяются с помощью дифференциальных выражений $a_j(x,t;D_x)$ (производные по пространственным переменным x заменяются дифференциальными операторами в функциональном пространстве). В литературе уравнение (5) называют *абстрактным уравнением типа Соболева* (в дальнейшем мы его будем называть просто *уравнением типа Соболева*). В общем случае уравнение (5) является *неявным*. Если оператор A_m при старшей производной по времени имеет нетривиальное ядро, то уравнение (5) является *вырожденным*.

По-видимому, первой работой, в которой встречается термин «вырожденное уравнение», является работа В.П. Скрипника 1964 года [92], где под системой понимается дифференциальное уравнение в векторной форме. Вырожденная система здесь возникла как предельная система. Подобные вырожденные системы уже появились в 1946 году у И.С. Градштейна [50]. Непосредственно вырожденные системы изучаются В.П. Скрипником в [93]. Для дифференциально-операторных уравнений термин «вырожденное уравнение» встречается в работе R.E. Showalter [151]. Вырожденные уравнения стали называть сингулярными в работах [120, 121, 158].

Также будем рассматривать *явное уравнение*, которое есть частный случай уравнения (5), когда A_m является единичным оператором:

$$\frac{d^m}{dt^m}u(t) + \sum_{j=0}^{m-1} A_j(t)\frac{d^j}{dt^j}u(t) = f(t). \tag{6}$$

При определенных ограничениях уравнение (5) сводится к уравнению вида

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{d^j}{dt^j} [\hat{A}_j(t)u(t)] = f(t) \tag{7}$$

с некоторыми операторами $\hat{A}_j(t)$. В этом случае для явного уравнения имеем представление

$$\frac{d^m}{dt^m} u(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{d^j}{dt^j} [\hat{A}_j(t)u(t)] = f(t). \tag{8}$$

Поэтому будем исследовать все четыре уравнения (5)-(8). В уравнениях (5)-(8) операторы $A_j, \hat{A}_j$ могут быть постоянными, а правая часть f может нелинейным образом зависеть от $u(t)$ и ее производных.